

Abbiamo visto che per il gruppo G di una pavimentazione ci sono forti restrizioni sui sottogruppi

$$G_A = \{g \in G : g(A) = A\}$$

$$T = \{g \in G : g \text{ traslazione}\}.$$

Combinando queste restrizioni si riesce (in modo non facile) a ottenere la lista (finita) di

"tutti" i possibili G . Ma prima bisogna intendersi su quando si considerano due G

"uguali" tra loro. Due casi in cui è

naturale identificare G_1 e G_2 sono quelli in cui $G_2 = \{\varphi^{-1} \circ g \circ \varphi : g \in G_1\}$ con:

- (1) φ isometria, infatti in tal caso una pavimentazione di gruppo G_2 è come una di gruppo G_1 , solo che la piastrella base P è stata posata nella posizione $\varphi(P)$, ma poi le regole di pose sono le stesse;

(2) φ omotetia, infatti in tal caso una delle due parimenti è solo un ingrandimento dell'altra.

Combinando (1) e (2) otteniamo tutte le φ che sono similitudini. Tuttavia anche usando tutte le similitudini restano distinti tra loro

troppi gruppi. Ad esempio per un gruppo di

traslazioni $\{T_{m_1 v_1 + m_2 v_2} : m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}$

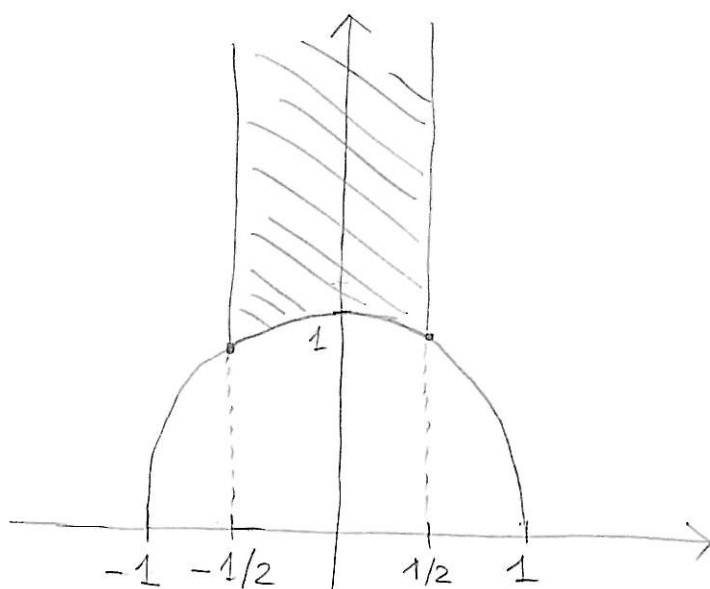
con una similitudine posso fare in modo

che T_{v_1} sia la traslazione più corta e

sia $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ in un riferimento cartesiano, ma

la successiva più corta T_{v_2} può essere

nell'insieme



(esercizio:
dimostrarlo)

e non possiamo fare (quasi) più nient'altro, (nel senso ad esempio che due punti interi distinti di tale insieme danno luogo a gruppi che non sono ottenuti l'uno dall'altro con una similitudine). Questo non è soddisfacente perché tutto sommato tutti i gruppi $\{T_{m_1 v_1 + m_2 v_2} : \dots\}$ sono molto simili tra loro. Per rimediare si accetta anche:

(3) φ trasformazione affine, cioè $\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ in un riferimento $Ox_0 y_0$, con A invertibile.

La differenza è che con tali φ si possono cambiare anche gli angoli nonché le lunghezze in direzioni diverse. È allora chiaro ad

esempio che ogni $\{T_{m_1 v_1 + m_2 v_2} : \dots\}$

diventa $\{T_{\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}} : m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}$ tramite

una tale φ . (Ma non è vero che per

ogni G gruppo di pavimentazioni esista una tale φ per cui $G' = \{\varphi^{-1} \circ g \circ \varphi : g \in G\}$

sia un gruppo di pavimentazioni e

$\{g' \in G' : g' \text{ traslazione}\}$ sia $\{T(\begin{smallmatrix} m_1 \\ m_2 \end{smallmatrix}) : \dots\}$.

Il punto è che G' può non essere un gruppo di pavimentazioni, mentre lo è se φ è una similitudine.)

Teorema: identificando tra loro due gruppi di pavimentazioni G_1 e G_2 se esiste φ affine tale che $G_2 = \{\varphi^{-1} \circ g \circ \varphi : g \in G_1\}$, ce ne sono precisamente 17 diversi, elencati nel seguito.

La nostra enumerazione sarà fatta in modo da suggerire almeno intuitivamente che i 17 sono in effetti diversi tra loro (e in effetti esiste una dimostrazione formale per questa via).

Useremo le seguenti nozioni:

Def: una relazione $\sim$ su un insieme X (cioè la scelta di alcuni elementi $(x_1, x_2) \in X \times X$ per cui è vera $x_1 \sim x_2$) è di equivalenza se è:

- riflessiva : $x \sim x \quad \forall x \in X$
- simmetrica : $x_1 \sim x_2 \Rightarrow x_2 \sim x_1$
- transitiva : $x_1 \sim x_2$ e $x_2 \sim x_3 \Rightarrow x_1 \sim x_3$.

Data tale $\sim$ diciamo classe di equivalenza di $x \in X$ l'insieme $[x] = \{x' \in X : x' \sim x\}$ e definiamo l'insieme quoziente $X/\sim$ come l'insieme delle classi di equivalenza.

Oss : le classi di equivalenza sono una partizione di X , cioè la loro unione è X e due distinte sono disgiunte.

Diciamo che $R \subset X$ è un insieme di rappresentanti se contiene esattamente un elemento per ogni classe di equivalenza.

Dunque R è in biiezione con $X/\sim$, ma una "descrizione ragionevole" di $X/\sim$ dipende da caso a caso. Può andare bene :

- un insieme R di rappresentanti

Esempio: $X = \{\text{leoni di una certa riserva}\}$

$x_1 \sim x_2$ se x_1 e x_2 sono nello stesso branco

$R = \{\text{il leone più vecchio di ogni branco}\}$

- un insieme di N di "nomi" per le classi di equivalenza

Esempio: $X = \{\text{gli studenti di ingegneria a Pisa}\}$

$x_1 \sim x_2$ se x_1 e x_2 sono iscritti allo stesso CdL

$N = \{\text{i CdL attivati a ingegneria a Pisa}\}$

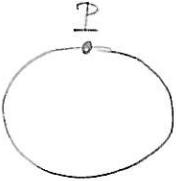
- un insieme Y di "rappresentanti sovrabbondanti", cioè che interseca tutte le classi di equivalenza ma qualcuno in più di uno, insieme alle istruzioni su quali punti di Y vanno ulteriormente identificati.

Esempio: $X = \mathbb{R}$

$x_1 \sim x_2$ se $x_1 - x_2 \in \mathbb{Z}$

Qua questo caso $[0, 1)$ è un insieme di

rappresentanti, ma non descrive bene $\mathbb{R}/\sim$,
 perché ad esempio $0,999$ sembra molto lontano
 da 0 in $[0,1)$, mentre $0,999 \sim -0,001$,
 dunque in $\mathbb{R}/\sim$ la classe di $0,999$ è molto
 vicina a quella di 0 . Meglio allora prendere
 $Y = [0,1]$ e ricordare che $0=1$ in $\mathbb{R}/\sim$.

Rappresentiamo cioè come  e
 notiamo che allora è naturale identificare
 $\mathbb{R}/\sim$ a , una circonferenza.

Tornando ai gruppi G delle tassellazioni, li
 descriveremo notando che su $\mathbb{E}^2$

$$P \sim Q \text{ se } \exists g \in G \text{ t.c. } Q = g(P)$$

è una relazione di equivalenza, e descrivendo
 $\mathbb{E}^2/G$. Inoltre per ogni G non daremo una
 vera descrizione di tutti gli elementi del gruppo,
 ma daremo:

- la piastrella base P
- le isometrie che dicono come posare alcune piastrelle vicino a quelle base
- una figura che mostra che iterando queste istruzioni di posa si copre tutto il piano senza sovrapposizioni se non lungo lati o in vertici
- una descrizione del quoziente $\mathbb{E}^2/G$, sempre ottenuta osservando che la stessa piastrella base P interseca tutte le classi di equivalenza, dunque si ottiene $\mathbb{E}^2/G$ identificando tra loro alcuni punti di P (sul suo bordo).

Quoltre:

- vediamo che sono ottenuti da altri aggiungendo alcune isometrie, a cui corrisponde il fatto che la nuova piastrella base è una porzione di quella vecchia.