

Isometrie del piano euclideo

Indichiamo con $\mathbb{E}^2$ il consueto piano euclideo, con le nozioni di distanza e angolo e le altre della geometria elementare. Indichiamo con $\text{Isom}(\mathbb{E}^2)$ l'insieme delle isometrie del piano, cioè:

$$\text{Isom}(\mathbb{E}^2) = \left\{ g: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2 \text{ invertibile, } \overline{g(P)g(Q)} = \overline{PQ} \quad \forall P, Q \in \mathbb{E}^2 \right\}.$$

Osservazioni: (1) la condizione che $g: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ conservi la lunghezza dei segmenti implica subito che g è iniettiva; in realtà implica anche che g è suriettiva, dunque la richiesta "invertibile" nella definizione è superflua;

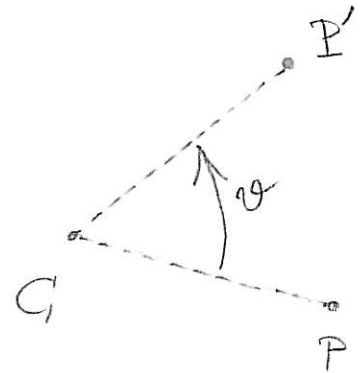
(2) poiché gli angoli di un triangolo sono determinate dalle lunghezze dei lati, $g \in \text{Isom}(\mathbb{E}^2)$ conserva l'ampiezza degli angoli.

Prop: con l'operazione di composizione $\text{Isom}(\mathbb{E}^2)$ è un gruppo.

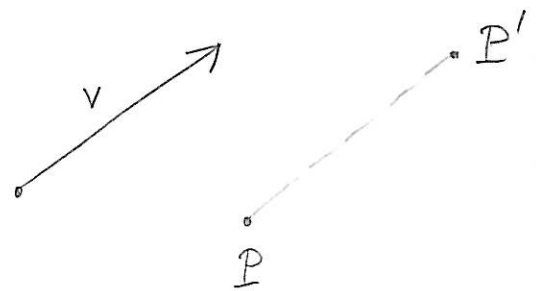
(Ovvio.)

Elenciamo alcune isometrie:

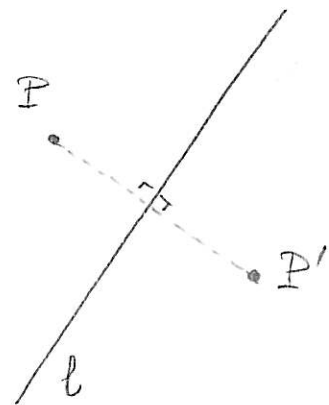
- l'identità id
- la rotazione $S_{C,\theta}$ di centro C e angolo θ



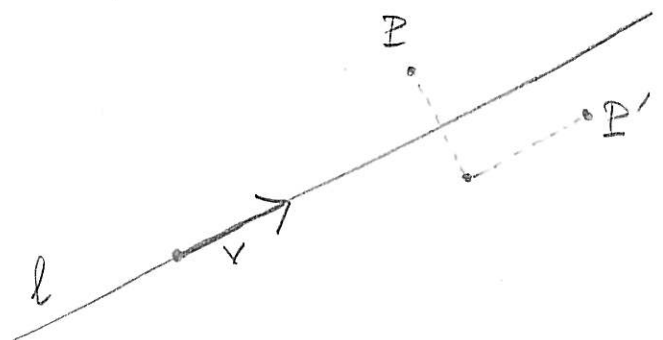
- la traslazione T_v di vettore v



- la riflessione σ_l rispetto a una retta l



- la glissoriflessione $\sigma_{l,v} = \sigma_l \circ T_v = T_v \circ \sigma_l$ con v parallelo a l



Giudichiamo con Γ l'insieme delle riflessioni con assecate.

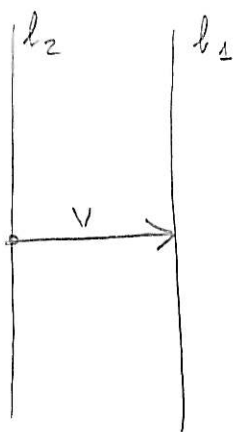
Per studiare le composizioni di elementi di Γ

iniziamo con:

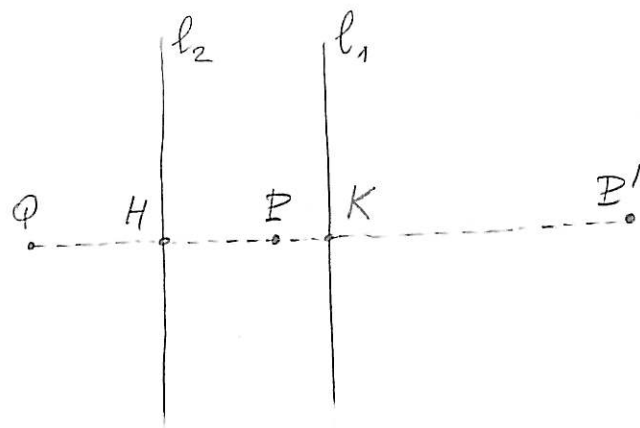
Prop: se l_1 e l_2 sono rette distinte allora $\sigma_{l_1} \circ \sigma_{l_2}$ è

- τ_{2v} se $l_1 \parallel l_2$ e v va da l_2 a l_1 perpendicolarmente
- $s_{C, 2\alpha}$ se $l_1 \cap l_2 = \{C\}$ e α è l'angolo da l_2 a l_1 .

Dim:

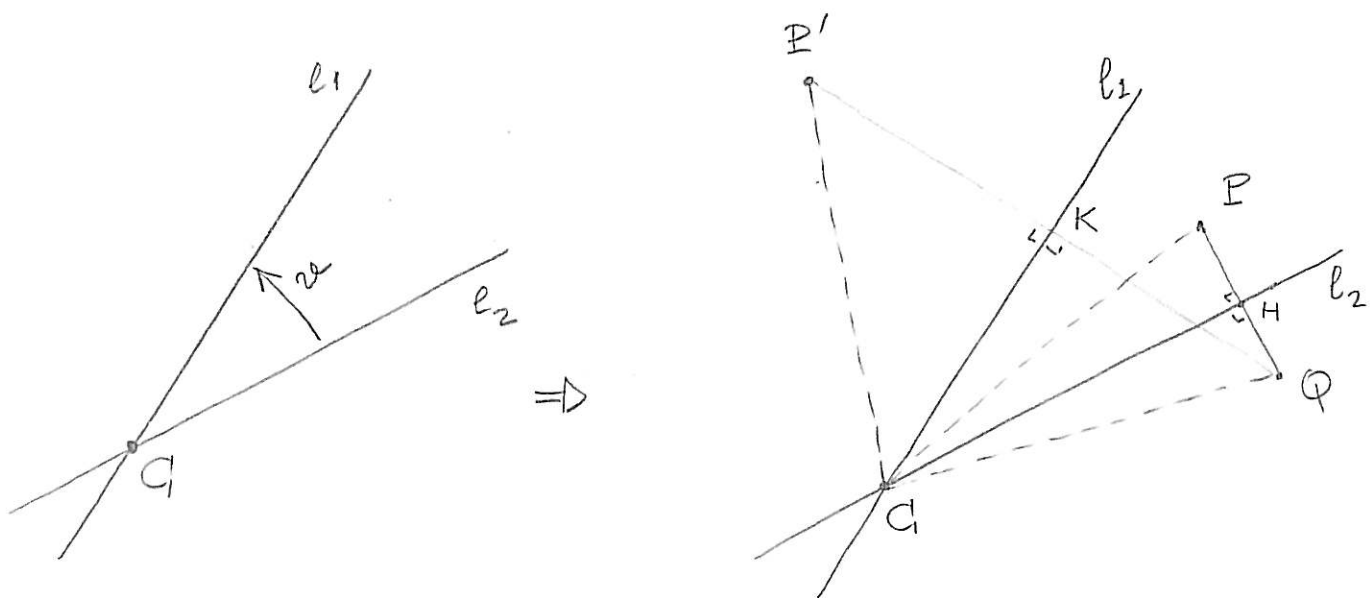


$\Rightarrow$



$$\begin{aligned} Q &= \sigma_{l_2}(P) & P' &= \sigma_{l_1}(Q) \\ \overline{PH} &= \overline{HQ} & \overline{QK} &= \overline{KP'} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \overline{PP'} = 2\overline{QK} - 2\overline{QH} = 2\overline{HK} = 2|v|.$$



$$Q = \sigma_{l_2}(P)$$

$$P' = \sigma_{l_1}(Q)$$

$$\widehat{PCH} = \widehat{HCQ}$$

$$\widehat{QCK} = \widehat{KCP'}$$

$$\widehat{HCK} = \vartheta$$

$$\begin{aligned} \widehat{PCP'} &= \widehat{PCK} + \widehat{KCP'} \\ &= (\widehat{HCK} - \widehat{HCP}) + \widehat{KCK} \\ &= (\widehat{HCK} - \widehat{HCP}) + (\widehat{KCH} + \widehat{HCQ}) \\ &= 2\widehat{HCK} = 2\vartheta. \end{aligned}$$

□

Da questo risultato segue subito che ogni traslazione e rotazione è esprimibile come composizione di due riflessioni. Pertanto:

Prop: Γ è contenuto in

$$\Gamma' = \{g \in \text{Isom}(\mathbb{E}^2) : g \text{ è composizione di al più tre riflessioni}\}.$$

Proveremo tra poco che $\Gamma' = \Gamma$. Cominciamo con le:

Oss: Sia $g \in \text{Isom}(\mathbb{E}^2)$

(1) g manda rette in rette; infatti la retta per A, B si descrive usando le lunghezze, come

$$\{C \in \mathbb{E}^2 : \overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB} \text{ oppure } \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} \text{ oppure } \overline{BC} = \overline{BA} + \overline{AC}\}$$

(2) se l è una retta e su due punti di l la g agisce come T_v con $v \parallel l$, allora agisce così su tutti i punti di l

(3) se g è l'identità su l allora $g = \text{id}$ oppure $g = \sigma_l$

(4) se $g(C) = C$ e g ruota di angolo α intorno a C due punti non allineati con C allora

$$g = S_{C, \alpha}$$

Prop: $\Gamma' = \Gamma$.

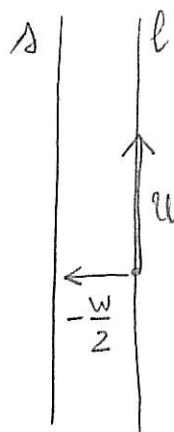
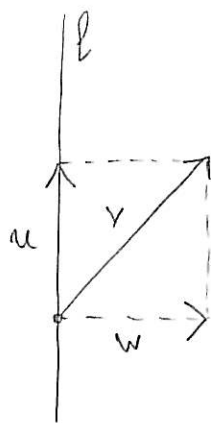
Dim: ogni composizione di meno di tre riflessioni è in Γ per quanto visto. Passando a tre abbiamo

$$\sigma_{\ell_1} \circ \sigma_{\ell_2} \circ \sigma_{\ell_3} = \sigma_{\ell_1} \circ (\sigma_{\ell_2} \circ \sigma_{\ell_3}) = \begin{cases} (1) & \sigma_{\ell} \circ \tau_v \\ (2) & \sigma_{\ell} \circ \rho_{G,v} \end{cases}$$

(1) Decompongo $v = u + w$ con $u \parallel \ell$, $w \perp \ell$

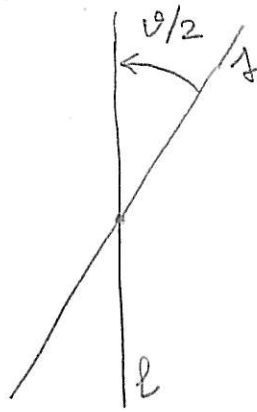
pongo $\delta = \tau_{-\frac{w}{2}}(\ell)$ e dico che $\sigma_{\ell} \circ \tau_v$ è

la glissoriflessione $\sigma_{\delta} \circ \tau_u$:



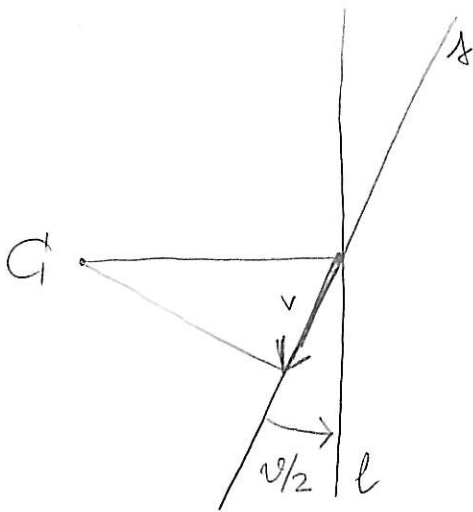
infatti è immediato vedere che su δ la $\sigma_{\ell} \circ \tau_v$ agisce come τ_u , dunque basta vedere che esiste un punto che passa da una parte all'altra di δ , il che è chiaro.

(2a) $\sigma_l \circ \rho_{C,v}$ con $C \in l$; dico che è σ_l con



infatti $\sigma_l \circ \rho_{C,v}$ è l'identità su s ma non è l'identità.

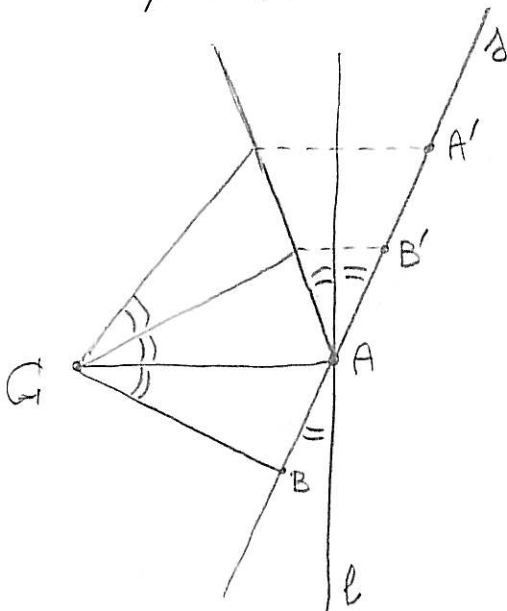
(2b) $\sigma_l \circ \rho_{C,v}$ con $C \notin l$



dico che è la glissoriflessione

$$\sigma_l \circ \tau_{-2v}$$

infatti



$$A' = \tau_{-2v}(A)$$

$$B' = \tau_{-2v}(B)$$

C' è dall'altra parte di s rispetto a C .



Prop: $\Gamma = \{g \in \text{Isom}(\mathbb{H}^2) : g \text{ è composizione di riflessioni}\}$

Dim : C è chiaro.

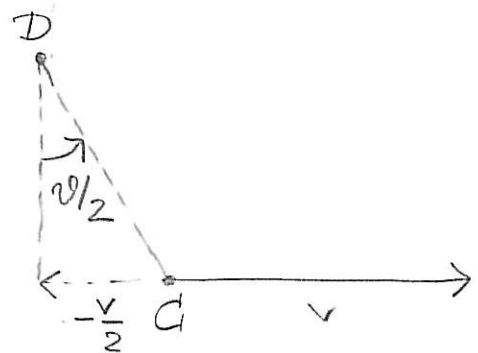
Per il viceversa basta vedere che

$$\sigma_{l_1} \circ \sigma_{l_2} \circ \sigma_{l_3} \circ \sigma_{l_4} \in T$$

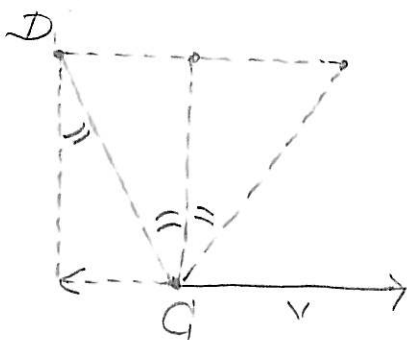
$$\text{ma} \quad (\sigma_{\ell_1} \circ \sigma_{\ell_2}) \circ (\sigma_{\ell_3} \circ \sigma_{\ell_4}) = \begin{cases} (1) & \tau_{v_1} \circ \tau_{v_2} \\ (2) & \rho_{G_1, v} \circ \tau_v \\ (3) & \tau_v \circ \rho_{G_1, v} \\ (4) & \rho_{G_{1,1}, v_1} \circ \rho_{G_{1,2}, v_2} \end{cases}$$

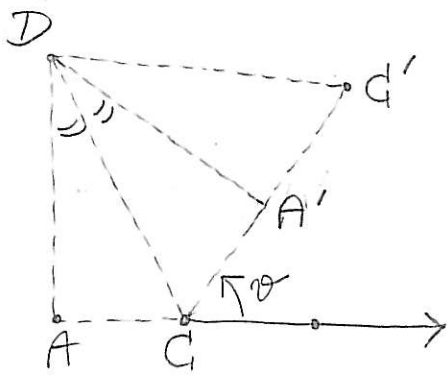
(1) $\tau_{v_1+v_2}$

(2) Dico che è $\rho_{D,v}$ con



infatti

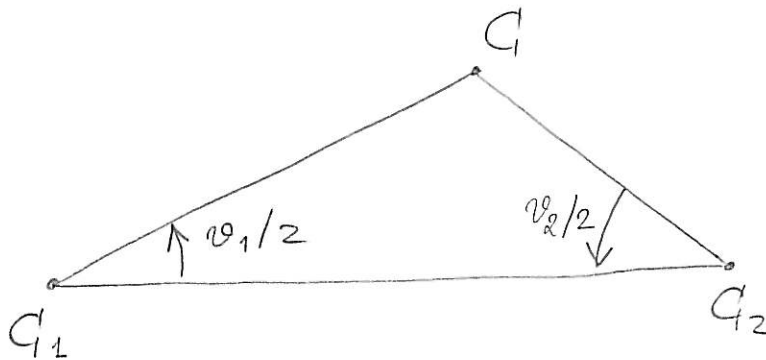

$$\Rightarrow D \text{ è fissato}$$



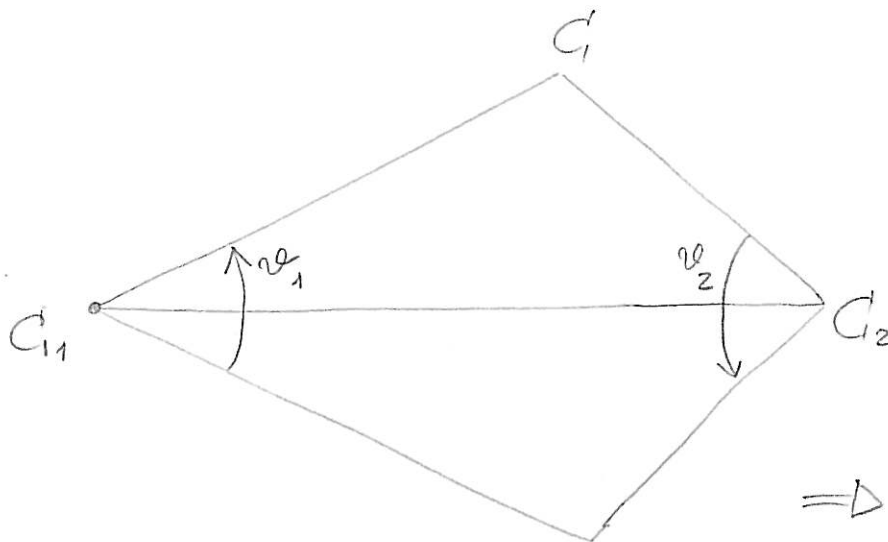
$\Rightarrow A$ e C ruotano di θ intorno a D .

(3) esercizio

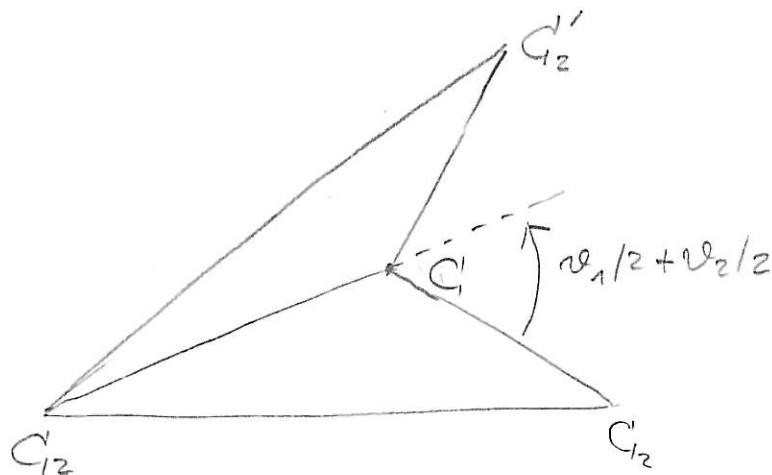
(4)



infatti



$\Rightarrow C'$ è fisso



$\Rightarrow C'_{12} = P_{C_1, \theta_1 + \theta_2}(C_2)$, e si vede che è proprio $P_{C_1, \theta_1 + \theta_2}$. $\square$ g

Teorema : $\Gamma = \text{Isom}(\mathbb{E}^2)$.

Dim : dal fatto che $\Gamma = \{\text{composiz. di riflessioni}\}$ segue che anche Γ è un gruppo, cioè

$$\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma \Rightarrow \gamma_1 \circ \gamma_2 \in \Gamma$$

(era già chiaro che $\gamma \in \Gamma \Rightarrow \gamma^{-1} \in \Gamma$).

Ora noto che

$$g \in \text{Isom}(\mathbb{E}^2), \gamma \in \Gamma, \gamma \circ g \in \Gamma \Rightarrow g \in \Gamma$$

(infatti se $\gamma \circ g = \gamma'$ allora $g = \gamma'^{-1} \circ \gamma \in \Gamma$).

Preso $g \in \text{Isom}(\mathbb{E}^2)$ per provare che $g \in \Gamma$ basta allora farlo dopo avere sostituito g con $\gamma \circ g$ con $\gamma \in \Gamma$, il che faremo ripetutamente.

Preso $A \in \mathbb{E}^2$ sostituendo g con $\tau_{\overrightarrow{Ag(A)}} \circ g$ abbiamo $g(A) = A$.

Preso $B \in \mathbb{E}^2$ con $\overline{AB} = 1$ sostituendo g con $\rho_{A, \hat{B}A} \circ g$ abbiamo $g(B) = B$.

Preso $C \in \mathbb{E}^2$ con $\overline{AC} = 1$ e $\hat{BAC} = +\frac{\pi}{2}$ abbiamo ora $g(C) = C$ oppure $g(C) = \sigma_{AB}(C)$.

Nel secondo caso sostituiamo g con $\sigma_{AB} \circ g$
 e abbiamo $g(C) = C$. Dunque
 $g(A) = A, g(B) = B, g(C) = C$.

Ora ogni $P \in \mathbb{E}^2$ è determinato da $\overline{AP}, \overline{BP}, \overline{CP}$,
 dunque $g = \text{id} \in \Gamma$. $\square$

Diremo che $g \in \text{Isom}(\mathbb{E}^2)$ conserva l'orientazione
 se presi A, A_1, A_2 t.c. $\overline{AA_1} = \overline{AA_2} = 1$ e $\widehat{A_1 A A_2} = +\frac{\pi}{2}$
 si ha $g(A_1) \widehat{g(A) g(A_2)} = +\frac{\pi}{2}$, che la inverte
 se $g(A_1) \widehat{g(A) g(A_2)} = -\frac{\pi}{2}$. Si può vedere in
 generale che se uno dei due casi accade per una
 scelta di A, A_1, A_2 allora accade per tutte.

Ma in realtà sapendo che $\text{Isom}(\mathbb{E}^2) = \Gamma$
 basta vedere esplicitamente cosa accade per le
 singole tipologie. Considerando anche l'insieme
 $\{P \in \mathbb{E}^2 : g(P) = P\}$ dei punti fissi di g
 abbiamo la classificazione

Tipo	id	τ_v	$\rho_{C, \pi}$	σ_e	$\sigma_{e, v}$
Punti fissi	$\mathbb{E}^2$	$\emptyset$	$\{C\}$	l	$\emptyset$
Orientazione	Conservata	Conservata	Conservata	Invertita	Invertita