

Trattazione analitica delle isometrie

Fissiamo su $\mathbb{E}^2$ un riferimento Oxy
(ortogonale monometrico orientato positivamente).

$$\text{Allora: } \text{id}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = I_2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ; \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\tau_v\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + v ;$$

$$p_{O,v}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos v & -\sin v \\ \sin v & \cos v \end{pmatrix}}_{R_v} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\right)_v &= R_v \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ &= R_v \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - R_v \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ &= R_v \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (I_2 - R_v) \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{Viceversa } g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = R_v \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \bar{c}$$

sempre una rotazione per $v \neq 2k\pi$; il centro
si trova imponendo $g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, cioè

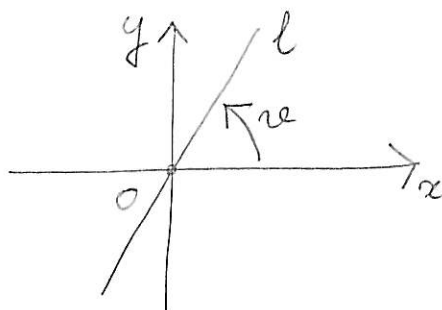
$$\begin{cases} (1 - \cos 2\vartheta) x + \sin 2\vartheta \cdot y = a \\ -\sin 2\vartheta \cdot x + (1 - \cos 2\vartheta) \cdot y = b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left((1 - \cos 2\vartheta)^2 + \sin^2 2\vartheta \right)}_{2(1 - \cos 2\vartheta) \neq 0} x = (1 - \cos 2\vartheta) a - \sin 2\vartheta \cdot b$$

e analogamente per y .

Esprimiamo ora σ_ℓ . Per iniziare $\sigma_{\{y=0\}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Ora se $O \in \ell$ e



abbiamo $\sigma_\ell = \rho_{0,\vartheta} \circ \sigma_{\{y=0\}} \circ \rho_{0,-\vartheta}$ dunque

$$\sigma_\ell \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{con}$$

$$M = R_{\vartheta} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot R_{-\vartheta}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & -\cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta & 2 \sin \vartheta \cos \vartheta \\ 2 \sin \vartheta \cos \vartheta & \sin^2 \vartheta - \cos^2 \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\vartheta & \sin 2\vartheta \\ \sin 2\vartheta & -\cos 2\vartheta \end{pmatrix}.$$

Potiamo ora $S_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$.

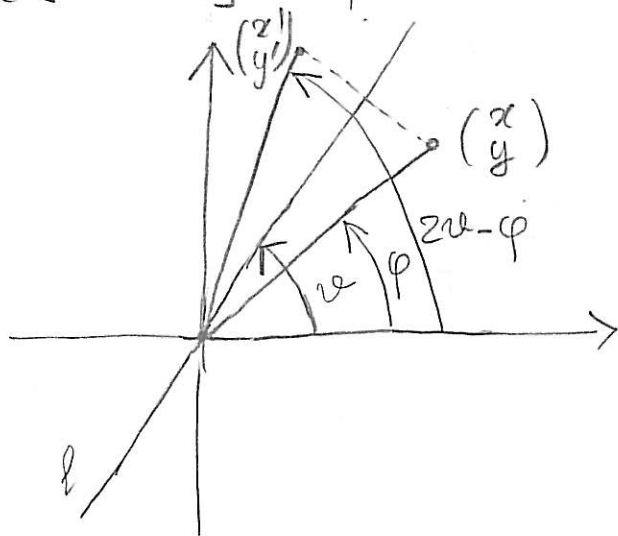
Abbiamo provato che: se $O \in l$ e l forma un angolo ϑ con la direz. positiva di Ox allora
 $T_l \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S_{2\vartheta} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Oss: è giusto che la matrice dipenda da 2ϑ e non da ϑ , infatti ϑ e $\vartheta + \pi$ danno la stessa l .

Possiamo provare la regola precedente in altri due modi:

(1) Scrivendo $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ in coordinate polari,

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos\varphi \\ \rho \sin\varphi \end{pmatrix}$ abbiamo



$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \rho \cos(2\vartheta - \varphi) \\ \rho \sin(2\vartheta - \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\vartheta \rho \cos\varphi + \sin 2\vartheta \rho \sin\varphi \\ \sin 2\vartheta \rho \cos\varphi - \cos 2\vartheta \rho \sin\varphi \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} \cos 2\vartheta & \sin 2\vartheta \\ \sin 2\vartheta & -\cos 2\vartheta \end{pmatrix}}_{S_{2\vartheta}} \underbrace{\begin{pmatrix} \rho \cos\varphi \\ \rho \sin\varphi \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

(2) Notando che $\begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \end{pmatrix} \in \ell$ e $\begin{pmatrix} -\sin v \\ \cos v \end{pmatrix} \perp \ell$,
 prendendo $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ generica e imponendo

$$M \cdot \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \end{pmatrix} \quad M \cdot \begin{pmatrix} -\sin v \\ \cos v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin v \\ -\cos v \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \cos v \cdot a + \sin v \cdot b = \cos v \\ -\sin v \cdot a + \cos v \cdot b = \sin v \end{cases}$$



$$a = \cos^2 v - \sin^2 v = \cos 2v$$

$$b = 2 \sin v \cos v = \sin 2v$$

$$\begin{cases} \cos v \cdot c + \sin v \cdot d = \sin v \\ -\sin v \cdot c + \cos v \cdot d = -\cos v \end{cases}$$

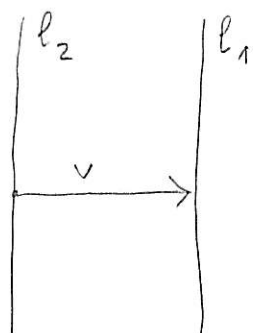


$$c = 2 \sin v \cos v = \sin 2v$$

$$d = \sin^2 v - \cos^2 v = -\cos 2v$$

$$\Rightarrow M = S_{2v}$$

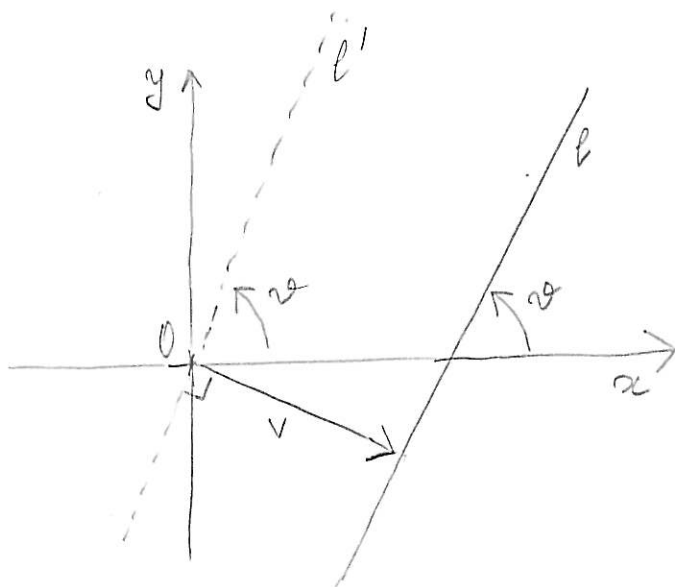
Passando a una riflessione per una retta non
 contenente l'origine, ricordiamo che



$$\Rightarrow \sigma_{l_1} \circ \sigma_{l_2} = \tau_{2v}$$

$$\Rightarrow \sigma_{l_1} = \tau_{2v} \circ \sigma_{l_2}$$

dunque



$$\Rightarrow \sigma_l = \tau_{2v} \circ \sigma_{l'}$$

$$\Rightarrow \sigma_l \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S_{2v} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2v.$$

Inoltre $2v = k \cdot \begin{pmatrix} -\sin v \\ \cos v \end{pmatrix}$ perché è ortogonale a l .

Viceversa se $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S_\varphi \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + w$ si avrà

che f è una riflessione se w è multiplo

di $\begin{pmatrix} -\sin(\varphi/2) \\ \cos(\varphi/2) \end{pmatrix}$; ma in realtà f è una

riflessione se e solo se ha punti fissi, e questa

condizione è molto più facile da verificare, e

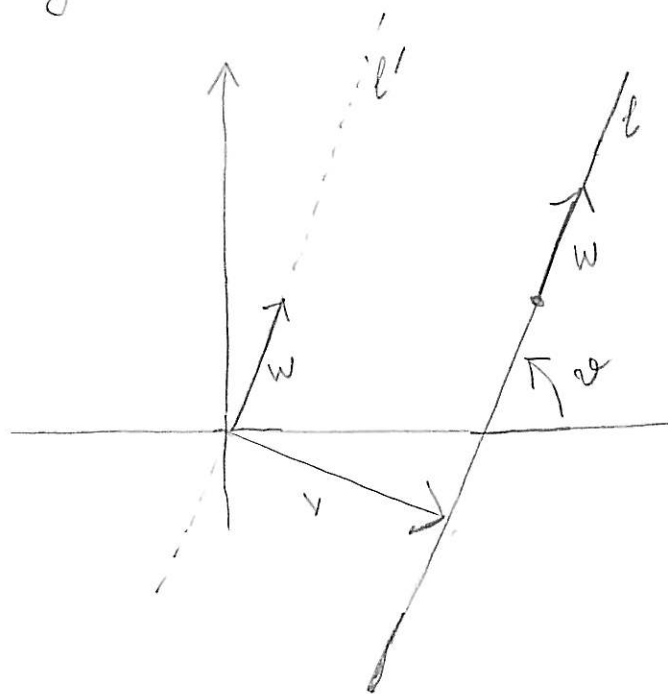
consente anche di trovare la retta l rispetto a cui

f è una riflessione.

Esempio: $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{4}{25} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Per cercare i punti fissi impongo $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
 e trovo due equazioni entrambe equivalenti a
 $4x - 3y + 2 = 0$. Questa equazione definisce una
 retta l , e f è la riflessione rispetto a l .

Per una glissoriflessione avremo



$$\sigma_{l,w} = \tau_w \circ \sigma_l = \tau_w \circ \tau_{2v} \circ \sigma_{l'}$$

$$\Rightarrow \sigma_{l,w} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S_{2v} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (2v + w).$$

Viceversa $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S_{\varphi} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + u$ sarà

una glissoriflessione perché α non sia ortogonale
 alla retta di inclinazione $\varphi/2$, ma in pratica
 è molto più semplice controllare che non abbia
 punti fissi, trovare la retta unita ℓ , trovare
 $w = f(P) - P$ con $P \in \ell$ e concludere che $f = \sigma_{\ell, w}$.

Esempio: $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ -12 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Cercando punti fissi $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ trovo un
 sistema impossibile

$$\begin{cases} 5x - 12y + 13 = 13x \\ -12x - 5y + 13 = 13y \end{cases} \quad \begin{cases} -8x - 12y = -13 \\ -12x - 18y = -13 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3y = \frac{13}{4} \\ 2x + 3y = \frac{13}{6} \end{cases}$$

dunque f è una glissoriflessione $\sigma_{\ell, w}$.

Inoltre $\ell \parallel \ell'$ dove ℓ' è la retta di riflessione

per $f'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ -12 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, per trovare le
 quale ho un sistema come sopra ma omogeneo,
 dunque $\ell': 2x + 3y = 0$ e $\ell: 2x + 3y = c$.

Perché ℓ sia unita devo avere che $2x' + 3y' = c$
 con $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ è equivalente a $2x + 3y = c$.

$$\begin{aligned} \text{Ora } 2x' + 3y' &= \frac{1}{13} (10x - 24y - 36x - 15y) + 2 + 3 \\ &= -2x - 3y + 5 \end{aligned}$$

dunque $2x' + 3y' = c \Leftrightarrow 2x + 3y = 5 - c$. Ho

allora $5 - c = c$, dunque $c = 5/2$, e concludo che

$l: 4x + 6y = 5$. Con facili conti vedo anche

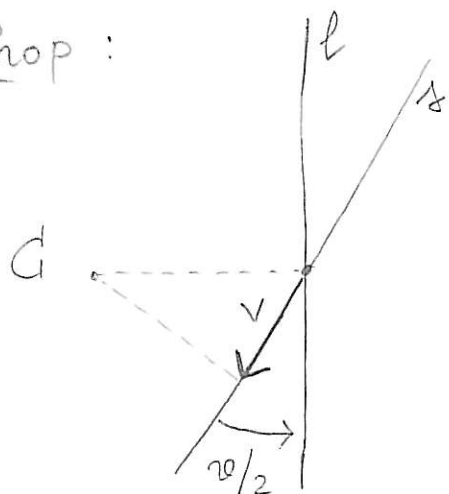
che $\forall y \in \mathbb{R}$ ho $f\left(\frac{\frac{1}{4}(5-6y)}{y}\right) = \left(\frac{\frac{1}{4}(5-6y)}{y}\right) = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

In conclusione $f = \tau_w \circ \sigma_l$ con $l: 4x + 6y = 5$ e $w = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

_____ o _____

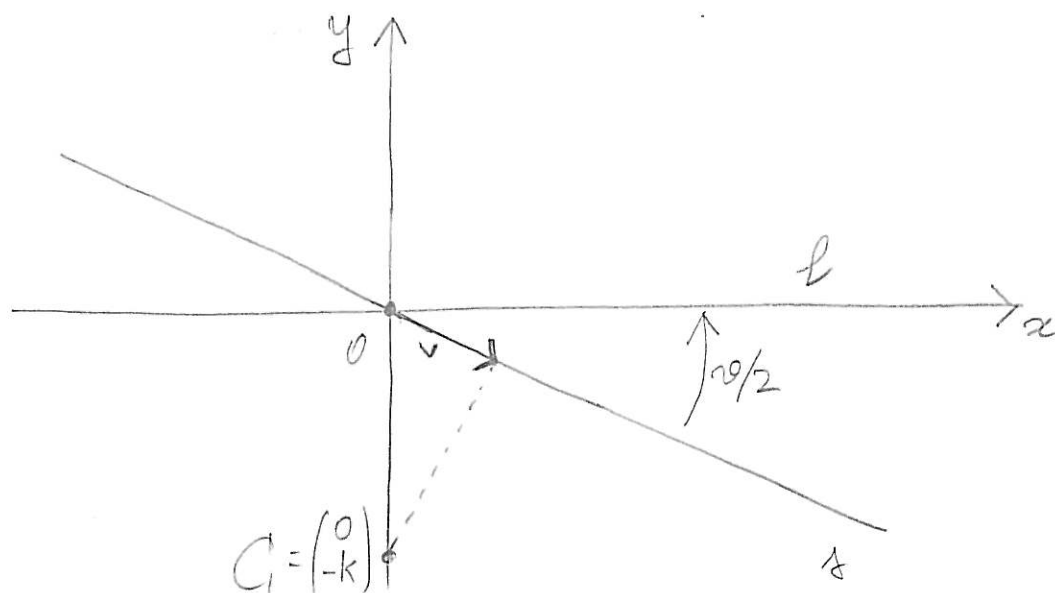
Tutti i risultati sulle composizioni delle isometrie dei vari tipi si possono rifare per via analitica. Facciamo un esempio:

Prop:



$$\Rightarrow \sigma_l \circ s_{C,v} = \tau_{-2v} \circ \sigma_r$$

Dim : scelgo le coordinate così :



$$\begin{aligned}
 (\sigma_l \circ \rho_{C, \pi/2}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \sigma_l \left(\begin{pmatrix} \cos \pi/2 & -\sin \pi/2 \\ \sin \pi/2 & \cos \pi/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y+k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} \right) \\
 &= \sigma_l \begin{pmatrix} x \cos \pi/2 - y \sin \pi/2 - k \sin \pi/2 \\ x \sin \pi/2 + y \cos \pi/2 + k \cos \pi/2 - k \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} x \cos \pi/2 - y \sin \pi/2 - k \sin \pi/2 \\ -x \sin \pi/2 - y \cos \pi/2 - k \cos \pi/2 + k \end{pmatrix} \\
 &= \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \pi/2 & -\sin \pi/2 \\ -\sin \pi/2 & -\cos \pi/2 \end{pmatrix}}_{S_{-\pi/2}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -k \sin \pi/2 \\ k - k \cos \pi/2 \end{pmatrix}}_w
 \end{aligned}$$

Una $S_{-\pi/2}$ è la riflessione in una retta per O di inclinazione $-\pi/2$, dunque proprio l .

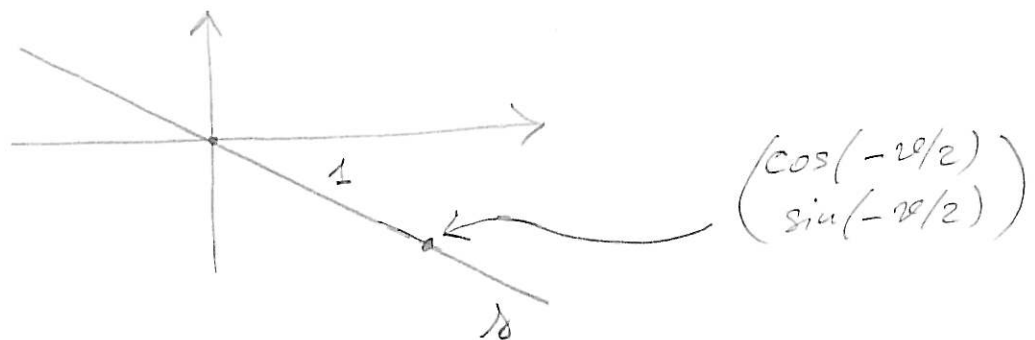
Resta da vedere che $w = -2v$.

$$w = k \begin{pmatrix} -\sin v \\ 1 - \cos v \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2 \sin(-v/2) \cos(v/2) \\ 2 \sin^2(-v/2) \end{pmatrix}$$

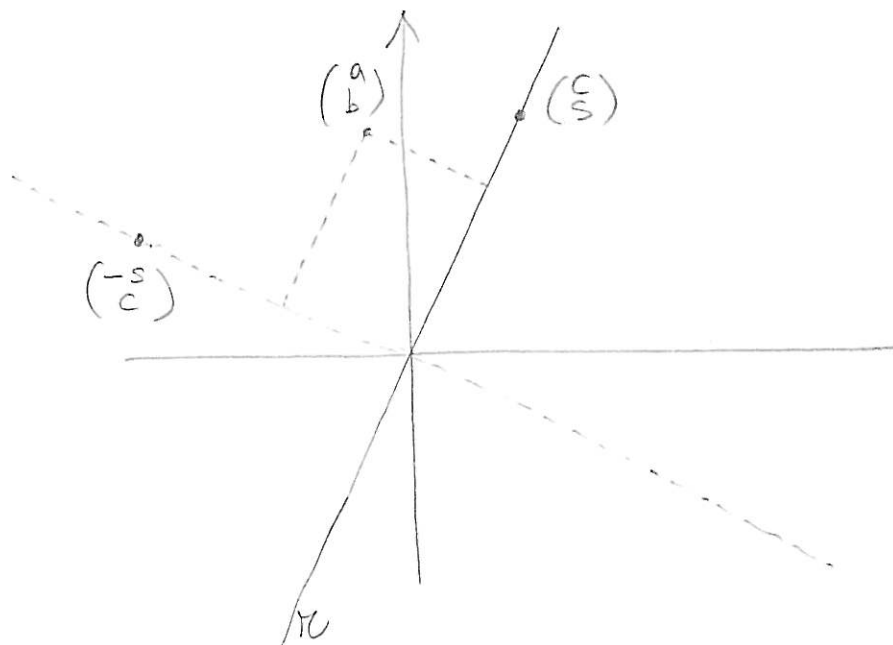
$$= -2 \underbrace{(-k \sin(-v/2))}_{\text{devo vedere che questo è } v} \cdot \begin{pmatrix} \cos(-v/2) \\ \sin(-v/2) \end{pmatrix}$$

devo vedere che questo è v .

Una



e ci basta vedere come si fa (in generale)
la proiezione ortogonale su una retta per O
di assegnato vettore direttore:



$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \underbrace{\lambda \cdot \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -s \\ c \end{pmatrix}}_{\text{proiezione ortogonale su } z}$$

$$\begin{cases} c\lambda - s\mu = a \\ s\lambda + c\mu = b \end{cases} \Rightarrow \lambda = c \cdot a + s \cdot b$$

e nel caso particolare di $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -k \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-v/2) \\ \sin(-v/2) \end{pmatrix}$
troviamo proprio $-k \sin(-v/2)$.