




---

 Geometria — Scritto del 24/6/11 — Quesiti
 

---

Nome \_\_\_\_\_ Cognome \_\_\_\_\_ Matricola \_\_\_\_\_

1. Determinare gli autovalori della matrice  $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  e una base che la diagonalizza.
2. Determinare tutti e vettori di  $\mathbb{C}^3$  unitari, aventi seconda componente immaginaria pura e somma delle componenti nulla, e ortogonali a  $ie_1 + (2i - 1)e_2 + (1 - i)e_3$ .
3. Determinare l'intersezione di  $\{[t - 3 : t - 2 : 3 - 2t] : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  con l'insieme dei punti all'infinito della quadrica di equazione  $xy + yz - z^2 - \sqrt{3}z = 1$
4. Stabilire per quali  $k \in \mathbb{R}$  la conica di equazione  $2(1 - k)x^2 + 2kxy + \frac{1}{4}y^2 + 2\sqrt{2}x + 1 = 0$  sia un'ellisse.
5. Determinare il tipo affine della quadrica di equazione  $xy + xz + yz + 2z^2 = y + 3$ .
- Geom 6. Esibire la matrice hessiana nel punto  $(1, -1)$  della funzione  $f(x, y) = 9 \ln(2 + xy^4)$  e determinare i segni dei suoi autovalori.
- Geom 7. Stabilire se sull'insieme  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < |x - 1| < 2 \text{ oppure } 1 < |y - 1| < 2\}$  siano definite forme chiuse non esatte.
- GAII 8. Dati 10 vettori di  $V = \{z \in \mathbb{C}^8 : \sum_{k=1}^8 (k + i)^2 z_k = 0\}$  che sono generatori di  $V$ , quanti bisogna scartarne per ottenere una base di  $V$ ?

GAII 9. Data  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ , calcolare  $(A^{-1})_{12}$ .

---

**Le risposte devono essere sinteticamente giustificate**

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

---

 1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ◇
 

---



1. Al variare di  $k \in \mathbb{C}$  considerare le matrici  $A_k = \begin{pmatrix} 3i & k \\ k-2 & k(1+i) \end{pmatrix}$  e  $B_k = A_k + A_k^*$ .
- (A) (4 punti) Determinare per quale valore di  $k \in \mathbb{C}$  la  $A_k$  ha autovalori  $\lambda_{1,2}$  immaginari puri e una base ortonormale  $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$  di autovettori, esibendo poi  $\lambda_{1,2}$  e  $\mathcal{B}$ .
- (B) (4 punti) Provare che  $B_k$  ammette sempre una base ortonormale di autovettori costituita da vettori di  $\mathbb{R}^2$ ; determinare inoltre i valori di  $k$  per cui ha un autovalore nullo e quelli per cui li ha entrambi nulli, provando che negli altri casi essi sono reali discordi.
- (C) (4 punti) Per  $k = 2 + \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)i$  trovare gli autovalori  $\eta_{1,2}$  di  $B_k$  e una base ortonormale  $(v_1, v_2)$  di  $\mathbb{R}^2$  che la diagonalizza.

Geom 2. Considerare la curva  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  data da  $\alpha(t) = \begin{pmatrix} 1-t^2 \\ \ln(1+t) \\ t \end{pmatrix}$  e la sua proiezione ortogonale  $\beta$  sul piano  $\mathbb{R}^2$  visto come  $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ .

- (A) (4 punti) Calcolare  $\int_{\alpha} (1+z)(13+13z-12x-8xz)$ .
- (B) (4 punti) Calcolare  $\int_{\beta} e^y(dx + (x-2)dy)$ .
- (C) (4 punti) Nel punto corrispondente a  $t = 0$  calcolare per  $\alpha$  la curvatura  $\kappa$ , la torsione  $\tau$  e il riferimento di Frénet  $\mathcal{E}$ .

Geom 3. Al variare di  $k$  in  $\mathbb{R}$  considerare le applicazioni lineari  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tali che

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ k-1 \\ 2k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2k \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} k+1 \\ 2 \\ 1-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 2k-9 \\ 0 \\ 7k+31 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3k \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

- (3A) (4 punti) Provare che per  $k = 2$  nessuna tale  $f$  esiste.
- (3B) (4 punti) Determinare i valori interi di  $k$  per cui esistono infinite tali  $f$ .
- (3C) (4 punti) Per  $k = -2$  determinare la seconda colonna della matrice di  $f$  rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^3$  in partenza e in arrivo.



## Risposte esatte

5. ♥

1.  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

2.  $\pm \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -1 - 8i \\ 5i \\ 1 + 3i \end{pmatrix}$

3.  $\{[2 : 1 : -1], [6 : 1 : 3]\}$

4.  $-1 < k < -\frac{1}{2}$  e  $0 < k < \frac{1}{2}$

5. Iperboloide a una falda

6.  $\begin{pmatrix} -1 & -8 \\ -8 & 20 \end{pmatrix}$ ; uno positivo e uno negativo

7. Sì, ad esempio  $\frac{-y dx + x dy}{(x-1)^2 + (y-1)^2}$

8. 3

9.  $-\frac{1}{3}$

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ◇