Geometria — Scritto del 24/6/11 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Determinare gli autovalori della matrice $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ e una base che la diagonalizza.

2. Determinare tutti e vettori di $\mathbb{C}^3$ unitari, aventi prima componente immaginaria pura e somma delle componenti nulla, e ortogonali a $(1-i)e_1 + 2ie_2 + (3+i)e_3$.

3. Determinare l'intersezione di $\{[t+1 : 2t-1 : 3-t] : \ t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ con l'insieme dei punti all'infinito della quadrica di equazione $xy + yz - z^2 - \sqrt{3}z = 1$

4. Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ la conica di equazione $2kx^2 + 2(1-k)xy + \frac{1}{4}y^2 + 2\sqrt{2}x + 1 = 0$ sia un'ellisse.

5. Determinare il tipo affine della quadrica di equazione $xy + xz + yz + z^2 = y + 3$.

Geom **6.** Esibire la matrice hessiana nel punto $(1,-1)$ della funzione $f(x,y) = 9\ln(1 + 2xy^4)$ e determinare i segni dei suoi autovalori.

Geom **7.** Stabilire se sull'insieme $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y > x^2 \text{ oppure } |y| < 1 \text{ oppure } x^2 + y^2 < 2\}$ siano definite forme chiuse non esatte.

GAII **8.** Dati 3 vettori linearmente indipendenti di $V = \left\{ z \in \mathbb{C}^8 : \ \sum_{k=1}^{8} (k+i)^2 z_k = 0 \right\}$, quanti bisogna aggiungerne per ottenere una base di V?

GAII **9.** Data $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, calcolare $(A^{-1})_{21}$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria — Scritto del 24/6/11 — Esercizî

1. Al variare di $k \in \mathbb{C}$ considerare le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 3i & k \\ k-2 & k(1+i) \end{pmatrix}$ e $B_k = A_k + A_k^*$.

(A) (4 punti) Determinare per quale valore di $k \in \mathbb{C}$ la A_k ha autovalori $\lambda_{1,2}$ immaginari puri e una base ortonormale $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ di autovettori, esibendo poi $\lambda_{1,2}$ e $\mathcal{B}$.

(B) (4 punti) Provare che B_k ammette sempre una base ortonormale di autovettori costituita da vettori di $\mathbb{R}^2$; determinare inoltre i valori di k per cui ha un autovalore nullo e quelli per cui li ha entrambi nulli, provando che negli altri casi essi sono reali discordi.

(C) (4 punti) Per $k = 2 + \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) i$ trovare gli autovalori $\eta_{1,2}$ di B_k e una base ortonormale (v_1, v_2) di $\mathbb{R}^2$ che la diagonalizza.

Geom **2.** Considerare la curva $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} 1-t^2 \\ \ln(1+t) \\ t \end{pmatrix}$ e la sua proiezione ortogonale β sul piano $\mathbb{R}^2$ visto come $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$.

(A) (4 punti) Calcolare $\int_\alpha (1+z)(13 + 13z - 12x - 8xz)$.

(B) (4 punti) Calcolare $\int_\beta e^y (\,\mathrm{d}x + (x-2)\,\mathrm{d}y)$.

(C) (4 punti) Nel punto corrispondente a $t = 0$ calcolare per α la curvatura κ, la torsione τ e il riferimento di Frénet $\mathcal{E}$.

GAII **3.** Al variare di k in $\mathbb{R}$ considerare le applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tali che

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ k-1 \\ 2k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2k \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} k+1 \\ 2 \\ 1-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 2k-9 \\ 0 \\ 7k+31 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3k \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

(3A) (4 punti) Provare che per $k = 2$ nessuna tale f esiste.

(3B) (4 punti) Determinare i valori interi di k per cui esistono infinite tali f.

(3C) (4 punti) Per $k = -2$ determinare la seconda colonna della matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ in partenza e in arrivo.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Geometria — Scritto del 24/6/11 — Quesiti

Risposte esatte

5. $\diamondsuit$

1. $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 5,\ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

2. $\pm\frac{1}{\sqrt{70}}\begin{pmatrix} 5i \\ -4-2i \\ 4-3i \end{pmatrix}$

3. $\{[2:1:2],\ [14:25:-10]\}$

4. $\frac{1}{2} < k < 1$ e $\frac{3}{2} < k < 2$

5. Paraboloide iperbolico

6. $\begin{pmatrix} -4 & -8 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}$; uno positivo e uno negativo

7. No, perché Ω è semplicemente connesso

8. 4

9. $\frac{4}{3}$

---

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$
