



Geometria — Scritto del 22/7/11 — Quesiti

Nome _____ Cognome _____ Matricola _____

1. Determinare gli autovalori di $\begin{pmatrix} i & 1-i \\ 2+2i & i \end{pmatrix}$ e una base che la diagonalizza.
2. Se $X \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ ha tutti i coefficienti non negativi, può avere almeno un autovalore negativo?
3. Sapendo che $X \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ è ortogonale che ha l'autovalore $\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{17}}(1 + 4i)$, dire quanto possono valere gli altri due autovalori $\lambda_{2,3}$.
4. Determinare la proiezione ortogonale in $\mathbb{R}^3$ del vettore $e_1 + 3e_2 - 5e_3$ sul piano $W = \text{Span}(4e_1 - e_2 + 2e_3, -e_1 + 2e_2 + 3e_3)$.
5. Per quali $k \in \mathbb{R}$ l'equazione $x^2 + k^2y^2 - z^2 + 4xy + 2\sqrt{3}yz = 2(k+1)x$ definisce un paraboloide iperbolico?
6. Determinare l'intersezione dell'insieme $\{[2+t : 2-3t : 3t-4] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : t \in \mathbb{R}\}$ con l'insieme dei punti all'infinito della quadrica $x^2 + 2xy - 3yz + 9y = \sqrt{5}$.
7. Calcolare $\int_{\alpha} \cos(x-y)(dx - dy)$ dove $\alpha(t) = \frac{\pi}{4} \begin{pmatrix} t-t^3 \\ t+t^3 \end{pmatrix}$ per $t \in [-1, 0]$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ♦



1. Considerare in $\mathbb{R}^3$ il piano $W = \text{Span}(e_1 - e_2 + e_3, 3e_1 + e_2 + 9e_3)$ e al variare di $k \in \mathbb{R}$ la retta $Z_k = \text{Span}((k+3)e_1 + (2k-1)e_2 - ke_3)$. Indicare rispettivamente con A , con B_k e con C_k le matrici che rappresentano le proiezioni ortogonali su W , su Z_k e su $Z_k^\perp$.

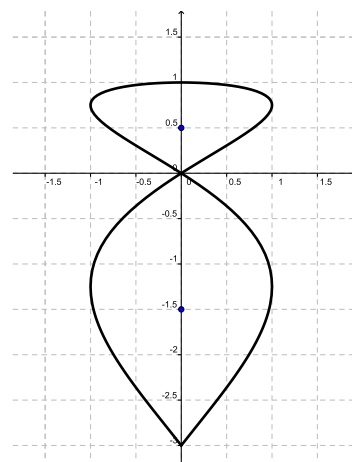
(A) (4 punti) Calcolare A e A^2 .

(B) (4 punti) Stabilire per quali k la $A_k \cdot B_k$ è la matrice nulla.

(C) (4 punti) Provare che $A_k \cdot C_k$ ha sempre gli autovalori 0 e 1 e un terzo compreso tra 0 e 1, stabilendo per quali k esso valga 0 o 1.

2. Considerare la curva $\alpha : [-2, +2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \sin(\pi \cdot t) \\ 1 - t^2 \end{pmatrix},$$
la cui immagine è mostrata in figura.



(A) (2 punti) Provare che α è chiusa e regolare.

(B) (3 punti) Determinare i più grandi intervalli del tipo $[-2, t_-)$ e $(t_+, +2]$ sui quali α è iniettiva.

(C) (2 punti) Determinare i punti nei quali l'immagine di α non ammette una retta tangente.

(D) (3 punti) Calcolare l'integrale su α delle forme $\frac{-y dx + x dy}{x^2 + (y+3/2)^2}$ e $\frac{-y dx + x dy}{x^2 + (y-1/2)^2}$.

(E) (2 punti) Calcolare l'integrale su α della forma $x dy$ e porre il risultato in relazione con le aree delle due regioni limitate individuate da α nella figura.



Risposte esatte

5. ♥

$$1. \lambda_1 = 2 + i, \lambda_2 = i - 2, v_1 = \begin{pmatrix} 1 - i \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} i - 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$2. \text{Sì, ad esempio } X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3. \lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{17}}(1 - 4i), \lambda_3 = \pm 1$$

$$4. - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$5. k = 1$$

$$6. \{[-3 : 1 : 1], [20 : -16 : 5]\}$$

$$7. -1$$

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ♦
