UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Geometria — Scritto del 22/7/11 — Quesiti

Nome _____ **Cognome** _____ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Determinare gli autovalori di $\begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 2i-1 & i \end{pmatrix}$ e una base che la diagonalizza.

2. Se $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ ha tutti i coefficienti positivi, può avere tre autovalori distinti negativi?

3. Sapendo che $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ è ortogonale che ha l'autovalore $\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{13}}(2-3i)$, dire quanto possono valere gli altri due autovalori $\lambda_{2,3}$.

4. Determinare la proiezione ortogonale in $\mathbb{R}^3$ del vettore $e_1 - 5e_2 + 3e_3$ sul piano $W = \mathrm{Span}(4e_1 - e_2 + 2e_3,\ -e_1 + 2e_2 + 3e_3)$.

5. Per quali $k \in \mathbb{R}$ l'equazione $x^2 + k^2y^2 - z^2 + 4xy + 2\sqrt{3}yz = 2(k-1)x$ definisce un paraboloide iperbolico?

6. Determinare l'intersezione dell'insieme $\{[1+2t : 2-t : 3t+6] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) :\ t \in \mathbb{R}\}$ con l'insieme dei punti all'infinito della quadrica $x^2 + 3xy - 2yz + 7x = \sqrt{3}$.

7. Calcolare $\int\limits_\alpha \cos(x+y)(\,\mathrm{d}x + \,\mathrm{d}y)$ dove $\alpha(t) = \frac{\pi}{4}\begin{pmatrix} t+t^2 \\ t-t^2 \end{pmatrix}$ per $t \in [-1,1]$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Geometria — Scritto del 22/7/11 — Esercizî

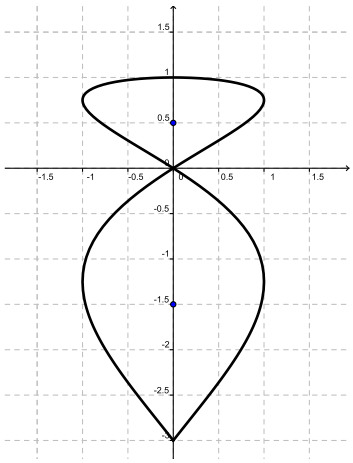
1. Considerare in $\mathbb{R}^3$ il piano $W = \mathrm{Span}(e_1 - e_2 + e_3,\ 3e_1 + e_2 + 9e_3)$ e al variare di $k \in \mathbb{R}$ la retta $Z_k = \mathrm{Span}((k+3)e_1 + (2k-1)e_2 - ke_3)$. Indicare rispettivamente con A, con B_k e con C_k le matrici che rappresentano le proiezioni ortogonali su W, su Z_k e su $Z_k^\perp$.

(A) (4 punti) Calcolare A e A^2.

(B) (4 punti) Stabilire per quali k la $A_k \cdot B_k$ è la matrice nulla.

(C) (4 punti) Provare che $A_k \cdot C_k$ ha sempre gli autovalori 0 e 1 e un terzo compreso tra 0 e 1, stabilendo per quali k esso valga 0 o 1.

2. Considerare la curva $\alpha : [-2, +2] \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} \sin(\pi \cdot t) \\ 1 - t^2 \end{pmatrix}$, la cui immagine è mostrata in figura.



(A) (2 punti) Provare che α è chiusa e regolare.

(B) (3 punti) Determinare i più grandi intervalli del tipo $[-2, t_-)$ e $(t_+, +2]$ sui quali α è iniettiva.

(C) (2 punti) Determinare i punti nei quali l'immagine di α non ammette una retta tangente.

(D) (3 punti) Calcolare l'integrale su α delle forme $\frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2+(y+3/2)^2}$ e $\frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2+(y-1/2)^2}$.

(E) (2 punti) Calcolare l'integrale su α della forma $x\,\mathrm{d}y$ e porre il risultato in relazione con le aree delle due regioni limitate individuate da α nella figura.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Geometria — Scritto del 22/7/11 — Quesiti

Risposte esatte

5. ♢

1. $\lambda_1 = 1 + 2i,\ \lambda_2 = 1 - i,\ v_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2i-1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

2. No, la somma degli autovalori è la traccia ed è positiva

3. $\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{13}}(2 + 3i),\ \lambda_3 = \pm 1$

4. $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

5. $k = -1$

6. $\{[3 : 1 : 9],\ [30 : -25 : 27]\}$

7. 2

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢