



Geometria — Scritto del 21/2/11 — Quesiti

Nome _____ Cognome _____ Matricola _____

1. Calcolare $\int_{\alpha} (y^2 dx - x^2 dy)$ con $\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ per $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

2. Calcolare la curvatura in $(0, 0)$ della curva $\alpha(t) = \begin{pmatrix} \ln t \\ \sin(\pi t) \end{pmatrix}$.

3. Calcolare $\int_{\alpha} xy^2(2y dx + 3x dy)$ con $\alpha(t) = \begin{pmatrix} t \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ per $t \in [0, \frac{\pi}{6}]$.

4. Al variare di k in $\mathbb{R}$ considerare in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ le rette ottenute proiettando da $\mathbb{R}^3$ i piani

$$\text{Span} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k+3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \text{ e } \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ k-5 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

Stabilire per quali k tali rette si incontrano in un punto all'infinito di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, e trovare tali punti.

5. Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ la quadrica di equazione $2y^2 - 8z^2 + 2xy + 2kxz + 2x - 8z + 1 = 0$ è un paraboloide iperbolico.

6. Trovare gli autovalori della matrice $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$ e una base che la diagonalizza.

7. Trovare una matrice coniugata a $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & \sqrt{6} \\ 3 & -\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}$ e avente due soli coefficienti non nulli.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ◇ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ◇



1. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & k^2 & -1 \\ 4 & -3k & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ e porre $\langle x|y \rangle = {}^t x \cdot A \cdot y$.
- (A) (1 punti) Trovare i valori di k per cui $\langle \cdot | \cdot \rangle$ è un'applicazione simmetrica.
- (B) (2 punti) Trovare il valore k_0 di k per cui $\langle \cdot | \cdot \rangle$ è un prodotto scalare.
- (C) (3 punti) Per l'unico valore di k per cui $\langle \cdot | \cdot \rangle$ è un'applicazione simmetrica ma non è un prodotto scalare, trovare i segni degli autovalori di A .
- (D) (3 punti) Per $k = k_0$ esibire un generatore della retta ortogonale rispetto a $\langle \cdot | \cdot \rangle$ al piano $\text{Span}(e_1 + e_2 - e_3, 2e_1 - e_2 + 3e_3)$
- (E) (3 punti) Per $k = k_0$ determinare il coseno dell'angolo formato rispetto a $\langle \cdot | \cdot \rangle$ dai vettori $e_1 - e_3$ ed e_2 .

2. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2-k & k-2 \\ k^2-k-3 & k^2+k-2 & 3-2k-k^2 \\ 1-k & 1 & -k \end{pmatrix}$.
- (A) (3 punti) Sapendo che il polinomio caratteristico $p_A(t)$ di A soddisfa $p_A(1) = k^4 - 2k^2$, trovare l'espressione di $p_A(t)$.
- (B) (3 punti) Sapendo che A ha sempre l'autovalore $1 - k$, trovare gli altri.
- (C) (3 punti) Trovare i valori di k per cui A ha autovalori con molteplicità algebrica maggiore di 1.
- (D) (3 punti) Trovare i valori di k per cui A non è diagonalizzabile.



Risposte esatte

5. $\diamond$

1. $-\frac{2}{3}$

2. $-\frac{\pi}{(1+\pi^2)^{3/2}}$

3. $\frac{\pi^2}{384}$

4. $k = -5$, $[1 : 2 : 0]$ e $k = 8$, $[6 : -1 : 0]$

5. $k = -2$

6. $7, -3; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamond$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamond$
