UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Geometria — Scritto del 16/1/12 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Provare che $\begin{pmatrix} 4 & i \\ 3+6i & i-1 \end{pmatrix}$ ha un autovalore λ reale e trovare un relativo autovettore v.

2. Calcolare l'angolo tra i vettori $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

3. Determinare i punti di intersezione tra $\{[t-1 : t+2 : t] : \ t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ e l'insieme dei punti all'infinito della quadrica di equazione $x^2+3xy-2yz+7x=12$.

4. Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ la conica di equazione $2x^2+4kxy+y^2+6x=3$ è un'iperbole.

5. Considerare la quadrica proiettiva $\{[x] \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) : \ 2x_1x_2+x_2^2-4x_1x_3+6x_2x_4-x_3^2+x_4^2=0\}$ e determinare il tipo affine della sua intersezione con l'insieme $\{[x] \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) : \ x_3=1\}$ identificato a $\mathbb{R}^3$.

6. Calcolare gli autovalori della matrice hessiana nel punto $(0,0)$ della funzione $f(x,y)=e^{xy}\cos y$.

7. Calcolare $\int_\alpha \frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{x+y}$ dove $\alpha(t)=(2+t+\sin(\pi t), 1+t^2)$ con $t \in [-1,1]$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

IN SUPREMÆ DIGNITATIS · 1343

Geometria — Scritto del 16/1/12 — Esercizî

1. Al variare di $w \in \mathbb{C}$ considerare le matrici

$$X = \begin{pmatrix} 3+2i & w \\ 1+2i & i \end{pmatrix}, \qquad Y = X + X^*, \qquad Z = X - X^*.$$

(A) (4 punti) Dire di che tipo sono gli autovalori di Y e provare che esiste sempre una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ costituita da autovettori di Y; per $w = 1+i$ esibire tali autovalori e base di autovettori.

(B) (4 punti) Dire di che tipo sono gli autovalori di Z e provare che esiste sempre una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ costituita da autovettori di Z; per $w = 1-i$ esibire tali autovalori e base di autovettori.

(C) (4 punti) Stabilire per quali w esiste una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ costituita da autovettori di X.

2. Considerare la curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} t\sin(t) \\ t\cos(t) \\ t^2 \end{pmatrix}$.

(A) (1 punto) Provare che α è regolare.

(B) (2 punti) Trovare il più grande intervallo del tipo $(-k, k)$ sul quale α è semplice.

(C) (3 punti) Trovare il riferimento di Frénet di α in $t = 0$.

(D) (3 punti) Calcolare $\int_\beta \sqrt{z}$ dove β è la restrizione di α a $[0,1]$.

(E) (3 punti) Calcolare $\int_\gamma (x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)$ dove γ è la restrizione di α a $[-1,0]$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Geometria — Scritto del 16/1/12 — Quesiti

Risposte esatte

5. $\diamondsuit$

1. $\lambda = 1$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3i \end{pmatrix}$

2. $\frac{\pi}{4}$

3. $[2 : -1 : 1]$ e $[3, 9, 5]$

4. $|k| > \frac{1}{\sqrt{2}}$ con $|k| \neq \frac{1}{2}\sqrt{5}$

5. Iperboloide a una falda

6. $\frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{5}\right)$

7. $\ln \frac{5}{3}$

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$