



Geometria — Scritto del 15/9/11 — Quesiti

Nome _____ Cognome _____ Matricola _____

1. Trovare il punto di $\{x \in \mathbb{R}^3 : 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 0\}$ avente minima distanza da $-e_1 + 5e_2 + 4e_3$.
2. Stabilire per quali $z \in \mathbb{C}$ la matrice $\begin{pmatrix} 0 & z^2 \\ -9 & z-3 \end{pmatrix}$ ha una base ortonormale complessa di autovettori e autovalori immaginari puri.
3. Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ che diagonalizza la matrice $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
4. Determinare l'intersezione tra $\{[1+t : 2-t : t-6] : t \in \mathbb{R}\}$ e l'insieme dei punti all'infinito della quadrica $x^2 + xy - 4yz + 7y = 5$.
5. Stabilire per quali $a \in \mathbb{R}$ l'equazione $(x+2y-z)^2 - a(3x-y+1)^2 = (a+1)(y-2z)$ definisce un paraboloide ellittico.
6. Determinare $\{[1+t : 5-t : -2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : t \in \mathbb{R}\} \cap \{[1+4t : -6 : 4+t] : t \in \mathbb{R}\}$.
7. Calcolare $\int_{\alpha} \frac{dx+dy}{x+y}$ dove $\alpha(t) = (3\sin^2(2t), 2\cos^2(3t))$ per $t \in [-\frac{\pi}{4}, 0]$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ◇



1. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare $A_k = \begin{pmatrix} k-2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & k & 2 & 0 \\ 0 & 0 & k+2 & 0 \\ 1 & 1 & k & 2-k \end{pmatrix}$.

- (A) (3 punti) Per $k = 0$ verificare che A_k non è iniettiva ed esibire una base ortonormale del sottospazio di $\mathbb{R}^4$ ortogonale alla sua immagine
- (B) (4 punti) Determinare al variare di k gli autovalori di A_k e le loro molteplicità algebriche.
- (C) (5 punti) Discutere per ogni k la diagonalizzabilità di A_k .

2. Considerare la curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = (\ln(1+t^2), t^3)$

- (A) (1 punti) Provare che α è semplice.
- (B) (2 punti) Stabilire in quali punti α non è regolare e verificare che effettivamente in tali punti l'immagine di α non è una curva liscia.
- (C) (3 punti) Determinare il segno della curvatura di α in ogni suo punto.
- (D) (3 punti) Calcolare la curvatura di α nel punto $t = 2$.
- (E) (3 punti) Calcolare l'integrale della forma $y \, dx$ sulla restrizione di α all'intervallo $[0, 1]$.



Risposte esatte

5. ♥

1. $\frac{1}{13} \begin{pmatrix} -25 \\ 69 \\ 36 \end{pmatrix}$

2. $z = 3$

3. $\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \sqrt{2} \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix}$

4. $\{[4 : -1 : -3], [21 : -9 : -7]\}$

5. $a < 0$ con $a \neq -1$

6. $\{[1 : 2 : -1]\}$

7. $-\ln 2$

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ♦