UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Geometria — Scritto del 15/9/11 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Trovare il punto di $\{x \in \mathbb{R}^3 : \ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 0\}$ avente minima distanza da $-2e_1 + 4e_2 + 5e_3$.

2. Stabilire per quali $t \in \mathbb{C}$ la matrice $\begin{pmatrix} t+2 & -4 \\ t^2 & 0 \end{pmatrix}$ ha una base ortonormale complessa di autovettori e autovalori immaginari puri.

3. Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ che diagonalizza la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

4. Determinare l'intersezione tra $\{[1+t : 2-t : t] : \ t \in \mathbb{R}\}$ e l'insieme dei punti all'infinito della quadrica $x^2 - 3xy + 2yz + 5x = 7$.

5. Stabilire per quali $a \in \mathbb{R}$ l'equazione $(x + 2y - z)^2 - a(3x - y + 1)^2 = (a - 1)(y - 2z)$ definisce un paraboloide iperbolico.

6. Determinare $\{[1 + t : t - 5 : -2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : \ t \in \mathbb{R}\} \cap \{[1 + 4t : 6 : 4 + t] : \ t \in \mathbb{R}\}$.

7. Calcolare $\int_\alpha \frac{\mathrm{d}x + \mathrm{d}y}{x+y}$ dove $\alpha(t) = (3\sin^2(2t), 2\cos^2(3t))$ per $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Geometria — Scritto del 15/9/11 — Esercizî

1. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare $A_k = \begin{pmatrix} k-2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & k & 2 & 0 \\ 0 & 0 & k+2 & 0 \\ 1 & 1 & k & 2-k \end{pmatrix}$.

(A) (3 punti) Per $k = 0$ verificare che A_k non è iniettiva ed esibire una base ortonormale del sottospazio di $\mathbb{R}^4$ ortogonale alla sua immagine

(B) (4 punti) Determinare al variare di k gli autovalori di A_k e le loro molteplicità algebriche.

(C) (5 punti) Discutere per ogni k la diagonalizzabilità di A_k.

2. Considerare la curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = (\ln(1+t^2), t^3)$

(A) (1 punti) Provare che α è semplice.

(B) (2 punti) Stabilire in quali punti α non è regolare e verificare che effettivamente in tali punti l'immagine di α non è una curva liscia.

(C) (3 punti) Determinare il segno della curvatura di α in ogni suo punto.

(D) (3 punti) Calcolare la curvatura di α nel punto $t = 2$.

(E) (3 punti) Calcolare l'integrale della forma $y\,\mathrm{d}x$ sulla restrizione di α all'itervallo $[0, 1]$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Geometria — Scritto del 15/9/11 — Quesiti

Risposte esatte

5. $\diamondsuit$

1. $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} -41 \\ 57 \\ 45 \end{pmatrix}$

2. $t = -2$

3. $\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \ \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

4. $\{[2:1:1],\ [3:-9:5]\}$

5. $a > 0$ con $a \neq 1$

6. $\{[-1:2:1]\}$

7. $\ln 2$

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$