



Geometria — Scritto del 8/7/11 — Quesiti

Nome \_\_\_\_\_ Cognome \_\_\_\_\_ Matricola \_\_\_\_\_

1. Se  $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  ha autovalori interi negativi e  $p_A(t) = t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0$ , quanto può valere  $a_1$ ?
2. Determinare gli autovalori di  $\begin{pmatrix} 2+i & -2 \\ 1+2i & -1-i \end{pmatrix}$  e una base  $(v_1, v_2)$  di  $\mathbb{C}^2$  che la diagonalizza.
3. Per quali  $k \in \mathbb{R}$  gli autovalori di  $\begin{pmatrix} 2k & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & k \end{pmatrix}$  sono reali? Per quali  $k$  sono positivi?
4. Trovare i vettori di  $\mathbb{C}^2$  unitari, con seconda coordinata immaginaria pura e ortogonali a  $\begin{pmatrix} 1-2i \\ 3+i \end{pmatrix}$ .
5. Per quali  $k \in \mathbb{R}$  l'equazione  $x^2 + ky^2 - z^2 + 4xy + 2yz + 4y + k = 0$  definisce un iperboloide a due falde?

**Geom 6.** Determinare i punti di intersezione degli insiemi  $\{[t+1 : -t : 2t+1] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : t \in \mathbb{R}\}$  e  $\{[t+1 : t^2-5 : t+5] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : t \in \mathbb{R}\}$ .

**Geom 7.** Stabilire per quale  $k \in \mathbb{R}$  la forma  $\frac{3x^2y}{1+x^3y^2}(y dx + kx dy)$  è chiusa.

**GAII 8.** Risolvere  $2z^2 + (5i-3)z + 2(2-i) = 0$

**GAII 9.** Determinare la base  $\mathcal{B}$  di  $\mathbb{R}^2$  tale che  $[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 7x_1 - 3x_2 \\ 2x_2 - 5x_1 \end{pmatrix}$  per ogni  $x \in \mathbb{R}^2$ .

---

### Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

---

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ◇

---



**Geom 1.** Considerare la curva  $\alpha : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$  data da  $\alpha(t) = \begin{pmatrix} t \cdot \ln(t) \\ \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix}$ .

- (A) (2 punti) Provare che  $\alpha$  è regolare e che le sue restrizioni a  $(0, 1]$  e a  $[1/e, +\infty)$  sono semplici.
- (B) (3 punti) Provare che la lunghezza della restrizione di  $\alpha$  a  $[1/2, 1]$  è maggiore o uguale di  $\frac{1}{12}$ .
- (C) (3 punti) Calcolare l'integrale della 1-forma  $e^{xy}(y dx + x dy)$  sulla restrizione di  $\alpha$  a  $[1, 2]$ .
- (D) (2 punti) Calcolare la curvatura di  $\alpha$  nel punto  $t = 1$ .
- (E) (2 punti) Determinare il segno della curvatura di  $\alpha$  al variare di  $t$ .

**2.** Al variare di  $k \in \mathbb{R}$  considerare la matrice  $A_k = \begin{pmatrix} k+2 & -k-1 & k+1 \\ k & 4-4k-2k^2 & 2k^2+3k-2 \\ k & 4-4k-3k^2 & 3k^2+3k-2 \end{pmatrix}$ .

- (A) (4 punti) Detto  $p_k(t)$  il polinomio caratteristico di  $A_k$  e sapendo che  $p_k(1) = (k^2-1)^2$ , determinare l'espressione di  $p_k(t)$  e gli autovalori di  $A_k$  al variare di  $k$ .
- (B) (6 punti) Discutere le diagonalizzabilità di  $A_k$  per  $k$  intero compreso tra  $-3$  e  $3$  (inclusi).
- (C) (2 punti) Determinare i segni degli autovalori di  $A_1 + {}^t A_1$ .

**GAII 3.** In  $\mathbb{R}^3$  considerare i sottospazi  $V$  e  $W$  definiti rispettivamente dalle equazioni  $5x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 0$  e  $9x_1 + 7x_2 - 6x_3 = 0$ .

- (A) (3 punti) Determinare una base  $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$  di  $V$  costituita da vettori aventi una coordinata nulla e le altre due intere positive prime fra loro, con la prima coordinata di  $v_1$  maggiore della prima coordinata di  $v_2$ .
- (B) (3 punti) Determinare una base di  $\mathcal{C} = (w_1, w_2)$  di  $W$  come nel punto precedente.
- (C) (3 punti) Data  $f : V \rightarrow W$  tale che  $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  calcolare  $f(8e_1 + e_2 - 6e_3)$ .
- (D) (3 punti) Provare che la formula  $g(x) = \begin{pmatrix} 23 & -20 & 24 \\ 3 & 0 & -6 \\ 38 & -30 & 29 \end{pmatrix} \cdot x$  definisce un'applicazione lineare  $g : V \rightarrow W$  e determinare  $[g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ .



## Risposte esatte

5. ♥

1. Un numero intero maggiore o uguale di 3
2.  $\lambda_1 = i$ ,  $\lambda_2 = 1 - i$ ,  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 + 2i \end{pmatrix}$
3. Ogni  $k \in \mathbb{R}$ ;  $k > 2$
4.  $\pm \frac{1}{5\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 7 + i \\ -5i \end{pmatrix}$
5.  $k < -1$  e  $k > 4$
6.  $[0 : 1 : -1]$  e  $[1 : -2 : 3]$
7.  $k = \frac{2}{3}$

---

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ◇

---