UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

IN SUPREMÆ DIGNITATIS 1343

Geometria — Scritto del 8/7/11 — Quesiti

Nome ______________ **Cognome** ______________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Se $X \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ ha autovalori interi positivi e $p_X(\lambda) = \lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0$, quanto può valere c_1?

2. Determinare gli autovalori di $\begin{pmatrix} 2-i & 2i-1 \\ 2 & i-1 \end{pmatrix}$ e una base (v_1, v_2) di $\mathbb{C}^2$ che la diagonalizza.

3. Per quali $k \in \mathbb{R}$ gli autovalori di $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & k & -2k \\ 1 & -2k & 5 \end{pmatrix}$ sono reali? Per quali k sono positivi?

4. Trovare i vettori di $\mathbb{C}^2$ unitarî, con prima coordinata immaginaria pura e ortogonali a $\begin{pmatrix} 1-2i \\ 3+i \end{pmatrix}$.

5. Per quali $k \in \mathbb{R}$ l'equazione $x^2 + ky^2 - z^2 + 4xy + 2yz + 4y + k = 0$
definisce un iperboloide a una falda?

Geom **6.** Determinare i punti di intersezione degli insiemi
$\{[-t : t+1 : 2t+1] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : \ t \in \mathbb{R}\}$ e $\{[t^2-5 : t+1 : t+5] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : \ t \in \mathbb{R}\}$.

Geom **7.** Stabilire per quale $k \in \mathbb{R}$ la forma $\frac{2xy^2}{1+x^2y^3}(y\,\mathrm{d}x + kx\,\mathrm{d}y)$ è chiusa.

GAII **8.** Risolvere $2z^2 + (5i-3)z + 2(2-i) = 0$

GAII **9.** Determinare la base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^2$ tale che $[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 7x_1 - 3x_2 \\ 2x_2 - 5x_1 \end{pmatrix}$ per ogni $x \in \mathbb{R}^2$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Geometria — Scritto del 8/7/11 — Esercizî

Geom **1.** Considerare la curva $\alpha : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} t \cdot \ln(t) \\ \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Provare che α è regolare e che le sue restrizioni a $(0,1]$ e a $[1/e, +\infty)$ sono semplici.

(B) (3 punti) Provare che la lunghezza della restrizione di α a $[1/2, 1]$ è maggiore o uguale di $\frac{1}{12}$.

(C) (3 punti) Calcolare l'integrale della 1-forma $e^{xy}(y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y)$ sulla restrizione di α a $[1,2]$.

(D) (2 punti) Calcolare la curvatura di α nel punto $t = 1$.

(E) (2 punti) Determinare il segno della curvatura di α al variare di t.

2. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k+2 & -k-1 & k+1 \\ k & 4-4k-2k^2 & 2k^2+3k-2 \\ k & 4-4k-3k^2 & 3k^2+3k-2 \end{pmatrix}$.

(A) (4 punti) Detto $p_k(t)$ il polinomio caratteristico di A_k e sapendo che $p_k(1) = (k^2-1)^2$, determinare l'espressione di $p_k(t)$ e gli autovalori di A_k al variare di k.

(B) (6 punti) Discutere le diagonalizzabilità di A_k per k intero compreso tra -3 e 3 (inclusi).

(C) (2 punti) Determinare i segni degli autovalori di $A_1 + {}^{\mathrm{t}}A_1$.

GAII **3.** In $\mathbb{R}^3$ considerare i sottospazî V e W definiti rispettivamente dalle equazioni $5x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 0$ e $9x_1 + 7x_2 - 6x_3 = 0$.

(A) (3 punti) Determinare una base $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ di V costituita da vettori aventi una coordinata nulla e le altre due intere positive prime fra loro, con la prima coordinata di v_1 maggiore della prima coordinata di v_2.

(B) (3 punti) Determinare una base di $\mathcal{C} = (w_1, w_2)$ di W come nel punto precedente.

(C) (3 punti) Data $f : V \to W$ tale che $[f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ calcolare $f(8e_1 + e_2 - 6e_3)$.

(D) (3 punti) Provare che la formula $g(x) = \begin{pmatrix} 23 & -20 & 24 \\ 3 & 0 & -6 \\ 38 & -30 & 29 \end{pmatrix} \cdot x$ definisce un'applicazione lineare $g : V \to W$ e determinare $[g]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Geometria — Scritto del 8/7/11 — Quesiti

Risposte esatte

5. $\diamondsuit$

1. Un numero intero maggiore o uguale di 3

2. $\lambda_1 = -i,\ \lambda_2 = 1 + i,\ v_1 = \begin{pmatrix} 1 - 2i \\ 2 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. Ogni $k \in \mathbb{R}$; $\frac{5}{8} < k < 1$

4. $\pm\frac{1}{5\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 10i \\ 7 - i \end{pmatrix}$

5. $-1 < k < 4$ con $k \neq 3$

6. $[1 : 0 : -1]$ e $[-2 : 1 : 3]$

7. $k = \frac{3}{2}$

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$