



Geometria — Scritto del 7/2/12 — Quesiti

Nome _____ Cognome _____ Matricola _____

1. Trovare gli autovalori di $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ e una base che la diagonalizza.
2. Posto $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 1 & t & 1 \\ 3 & 1 & t \end{pmatrix}$ stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ si ha che $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$.
3. Descrivere le matrici ortogonali 4×4 con determinante -1 .
4. Determinare il polinomio caratteristico di $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -i \\ 0 & i & 1 \\ 3 & 2i & 0 \end{pmatrix}$.
5. Stabilire il tipo affine della quadrica di equazione $3y^2 - 6xy + 4xz - 2yz - 2y + 2z = 1$.
6. Determinare l'intersezione di $\{[t : t-8 : 4] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : t \in \mathbb{R}\}$ con $\{[2-t : 3 : t-5] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : t \in \mathbb{R}\}$.
7. Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ risulta esatta la forma
 $xy^3 (3 \sin(x^2y^3) + 2 \cos(x^2y^3)) \, dx + x^2y^2 (k \sin(x^2y^3) + 3 \cos(x^2y^3)) \, dy$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ◇ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ◇



1. In $\mathbb{R}^3$ considerare il sottospazio X di equazione $4x - 3y + z = 0$ e indicare con p e q le proiezioni ortogonali di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente su X e su $X^\perp$, rispetto al prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^3$. Considerare inoltre la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (A) (3 punti) Esibire la matrice M di p verificando le sue proprietà.
- (B) (3 punti) Determinare gli autovalori di $f(x) = p(x) - q(x)$ con le loro molteplicità algebriche e geometriche.
- (C) (3 punti) Provare che $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$.
- (D) (3 punti) Trovare un generatore della retta ortogonale a X rispetto a $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$.

2. Considerare la curva $\alpha : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} t \log t \\ t^2 + \frac{1}{t} \end{pmatrix}$.

- (A) (1 punto) Provare che α è regolare.
- (B) (2 punti) Provare che α è semplice.
- (C) (3 punti) Calcolare la curvatura di α nel punto corrispondente a $t = 1$.
- (D) (3 punti) Calcolare $\int_{\beta} e^{xy}(y dx + x dy)$ dove β è la restrizione di α a $[1, 2]$.
- (E) (2 punti) Provare che la curvatura di α si annulla in almeno un punto.
- (F) (1 punto) Provare che la curvatura di α si annulla in esattamente un punto.



Risposte esatte

5. $\diamond$

1. $\lambda_1 = 4, v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = -7, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

2. $t > \frac{5}{3}$

3. Le coniugate tramite ortogonali di quelle del tipo $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ 0 & 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}$

4. $t^3 - (2+i)t^2 + 3it + 3 + 4i$

5. Paraboloide iperbolico

6. Il punto $[1 : -3 : 2]$

7. $k = \frac{9}{2}$

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. $\diamond$ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. $\diamond$
