



Algebra Lineare — Scritto del 25/2/11 — Quesiti

Nome _____ Cognome _____ Matricola _____

1. Posto $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0\}$, provare che $v = -e_1 + 4e_2 + e_3$ appartiene a X e che $\mathcal{B} = (e_1 - e_2 + e_3, e_1 + 8e_2 + 7e_3)$ è una base di X , e determinare le coordinate di v rispetto a $\mathcal{B}$.

2. Posto $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ calcolare $(A^{-1})_{23}$.

3. Calcolare $\det(2e_1 + e_4, 2e_2 + e_3, 2e_4 - e_3, 3e_2 - e_1 - e_4)$.

4. Se $f : \mathbb{C}^8 \rightarrow \mathbb{C}^3$ è lineare, $3ie_1 + 2e_3 \notin \text{Im}(f)$ e $\mathbb{C}^8 = W \oplus \text{Ker}(f)$, che dimensione può avere W ? che dimensione può avere X ?

5. Risolvere $\begin{cases} 2x + 5y - 4z = 1 \\ 3x + 3y - 2z = 3 \\ x + 7y - 6z = -1. \end{cases}$

6. Trovare $z \in \mathbb{C}$ tale che $z \cdot e_2 + 5e_3 \in \text{Span}((1-2i)e_1 + (1+i)e_2 + 2e_3, (1+i)e_1 + (1-i)e_2 + (1+i)e_3)$.

AL10 7. Determinare la proiezione su Z di $2e_1 - e_2 - e_3 - e_4$ rispetto alla decomposizione $\mathbb{R}^4 = W \oplus Z$ con $W = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - 2x_3 = 2x_1 + x_3 - x_4 = 0\}$ e $Z = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - 2x_2 + x_3 = x_2 + 3x_3 - x_4 = 0\}$.

AL08 8. Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} k^2 + 2k + 2 & -k - 1 \\ 2k^2 + 2k & -k \end{pmatrix}$ non è diagonalizzabile.

GAI 9. Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ la conica di equazione $x^2 + 2kxy + 3y^2 - 2x + 2y + 3 = 0$ è un'ellisse.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ◇



1. Al variare di $k, h \in \mathbb{R}$ considerare in $\mathbb{R}^4$ il sottospazio X_k di equazioni

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + (k+1)x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + (1-k)x_4 = 0 \\ -x_1 + (k-3)x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{e la matrice } A_h = \begin{pmatrix} 2 & 5 & h & -5 \\ 1 & h+1 & -1 & -3 \\ h+2 & 3 & 1 & -2 \\ -1 & -5 & 2 & 3+2h \end{pmatrix}.$$

- (A) (3 punti) Determinare $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ e $k_0 \in \mathbb{R}$ tali che $\dim(X_k) = n_1$ per $k \neq k_0$ e $\dim(X_{k_0}) = n_2$.
- (B) (3 punti) Esibire una base di X_k per $k = 3$ e per $k = k_0$.
- (C) (3 punti) Determinare $h_0 \in \mathbb{R}$ tale che la formula $f(x) = A_{h_0} \cdot x$ definisca un'applicazione lineare da X_{k_0} in sé stesso.
- (D) (3 punti) Esibire la matrice della f_{h_0} del punto (C) rispetto alla base di X_{k_0} del punto (B).

2. Al variare di $k, h \in \mathbb{R}$ considerare in $\mathbb{R}^3$ i sottospazi affini E_k di equazioni

$$\begin{cases} (k-2)x - (1+k)y + 9z = k+7 \\ (3-k)x + 4y - (1+k)z = 2(1-k) \end{cases} \quad \text{ed } F_h = \begin{pmatrix} 1-h \\ h \\ h+1 \end{pmatrix} + \text{Span} \begin{pmatrix} 1+6h \\ h-1 \\ 1-3h \end{pmatrix}.$$

- (A) (3 punti) Determinare $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ e $k_0 \in \mathbb{R}$ tali che $\dim(E_k) = n_1$ per $k \neq k_0$ e $\dim(E_{k_0}) = n_2$.
- (B) (2 punti) Esibire equazioni parametriche di E_k per $k = 4$ e per $k = k_0$.
- (C) (2 punti) Al variare di h determinare la dimensione di F_h ed esibirne equazioni cartesiane.
- (D) (3 punti) Verificare che le giaciture di E_{k_0} e di $F_{(-1)}$ danno una decomposizione di $\mathbb{R}^3$ in somma diretta e calcolare la proiezione di e_1 sulla giacitura di E_{k_0} rispetto a tale decomposizione.
- (E) (2 punti) Determinare i valori di k e h per cui E_k e F_h sono paralleli tra loro.



Risposte esatte

5. ♥

1. $[v]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. $\frac{5}{2}$

3. 14

4. Tra 0 e 2

5. $x = -2t, y = 5 + 8t, z = 6 + 9t$

6. $7 - 4i$

7. $e_1 - e_3 - 3e_4$

8. $k = 2$

9. $|k| < \sqrt{3}$ con $k \neq 1$ e $k \neq -\frac{5}{3}$

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ♦