UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Algebra Lineare — Scritto del 25/2/11 — Quesiti

Nome ______________ **Cognome** ______________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Posto $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0\}$, provare che $v = e_1 + 4e_2 + e_3$ appartiene a X e che $\mathcal{B} = (4e_1 + 11e_2 + 2e_3, \ 3e_1 + 2e_2 - e_3)$ è una base di X, e determinare le coordinate di v rispetto a $\mathcal{B}$.

2. Posto $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ calcolare $(A^{-1})_{23}$.

3. Calcolare $\det(2e_1 + e_2 + e_4, \ 2e_2 + e_3, \ 2e_4 - e_3, \ 3e_2 - e_1)$.

4. Se $f : \mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^7$ è lineare, $f(2ie_1 + e_3) = f(e_2)$ e $\mathbb{C}^7 = X \oplus \mathrm{Im}(f)$, che dimensione può avere X?

5. Risolvere $\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 1 \\ 3x - y - 2z = 2 \\ x + 7y - 6z = 0. \end{cases}$

6. Trovare $z \in \mathbb{C}$ tale che $z \cdot e_2 - 2e_3 \in \mathrm{Span}((1-i)e_1 + (1+2i)e_2 + 2ie_3, \ (2+i)e_1 + (2-i)e_2 - e_3)$.

AL10 **7.** Determinare la proiezione su W di $2e_1 + 3e_2 + e_3 + 2e_4$ rispetto alla decomposizione $\mathbb{R}^4 = W \oplus Z$ con $W = \{x \in \mathbb{R}^4 : \ x_1 + x_2 - 2x_3 = 2x_1 + x_3 - x_4 = 0\}$ $Z = \{x \in \mathbb{R}^4 : \ x_1 - 2x_2 + x_3 = x_2 + 3x_3 - x_4 = 0\}$.

AL08 **8.** Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} k^2 + 2k + 2 & -k - 1 \\ 2k^2 + 2k & -k \end{pmatrix}$ non è diagonalizzabile.

GAI **9.** Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ la conica di equazione $x^2 + 2kxy + 3y^2 - 2x + 2y + 3 = 0$ è un'ellisse.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Algebra Lineare — Scritto del 25/2/11 — Esercizî

1. Al variare di $k, h \in \mathbb{R}$ considerare in $\mathbb{R}^4$ il sottospazio X_k di equazioni

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + (k+1)x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + (1-k)x_4 = 0 \\ -x_1 + (k-3)x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{e la matrice } A_h = \begin{pmatrix} 2 & 5 & h & -5 \\ 1 & h+1 & -1 & -3 \\ h+2 & 3 & 1 & -2 \\ -1 & -5 & 2 & 3+2h \end{pmatrix}.$$

(A) (3 punti) Determinare $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ e $k_0 \in \mathbb{R}$ tali che $\dim(X_k) = n_1$ per $k \neq k_0$ e $\dim(X_{k_0}) = n_2$.

(B) (3 punti) Esibire una base di X_k per $k = 3$ e per $k = k_0$.

(C) (3 punti) Determinare $h_0 \in \mathbb{R}$ tale che la formula $f(x) = A_{h_0} \cdot x$ definisca un'applicazione lineare da X_{k_0} in sé stesso.

(D) (3 punti) Esibire la matrice della f_{h_0} del punto (C) rispetto alla base di X_{k_0} del punto (B).

2. Al variare di $k, h \in \mathbb{R}$ considerare in $\mathbb{R}^3$ i sottospazî affini E_k di equazioni

$$\begin{cases} (k-2)x - (1+k)y + 9z = k+7 \\ (3-k)x + 4y - (1+k)z = 2(1-k) \end{cases} \quad \text{ed } F_h = \begin{pmatrix} 1-h \\ h \\ h+1 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1+6h \\ h-1 \\ 1-3h \end{pmatrix}.$$

(A) (3 punti) Determinare $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ e $k_0 \in \mathbb{R}$ tali che $\dim(E_k) = n_1$ per $k \neq k_0$ e $\dim(E_{k_0}) = n_2$.

(B) (2 punti) Esibire equazioni parametriche di E_k per $k = 4$ e per $k = k_0$.

(C) (2 punti) Al variare di h determinare la dimensione di F_h ed esibirne equazioni cartesiane.

(D) (3 punti) Verificare che le giaciture di E_{k_0} e di $F_{(-1)}$ danno una decomposizione di $\mathbb{R}^3$ in somma diretta e calcolare la proiezione di e_1 sulla giacitura di E_{k_0} rispetto a tale decomposizione.

(E) (2 punti) Determinare i valori di k e h per cui E_k e F_h sono paralleli tra loro.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Algebra Lineare — Scritto del 25/2/11 — Quesiti

Risposte esatte

5. $\diamondsuit$

1. $[v]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

2. $-\frac{7}{4}$

3. 12

4. Tra 3 e 7

5. $x = 7 + 10t,\ y = 5 + 8t,\ z = 7 + 11t$

6. $i - 5$

7. $2e_2 + e_3 + e_4$

8. $k = 2$

9. $|k| < \sqrt{3}$ con $k \neq 1$ e $k \neq -\frac{5}{3}$

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$