



Algebra Lineare — Scritto del 22/7/11 — Quesiti

Nome _____ Cognome _____ Matricola _____

1. Data $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \{x \in \mathbb{R}^3 : 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0\}$ tale che $f(e_1 - 2e_2) = e_1 - e_2 - e_3$
e $f(3e_1 - e_2) = e_1 + e_2 + 4e_3$ calcolare $f^{-1}(2e_1 + 3e_3)$.

2. Determinare la base \mathcal{B} di \mathbb{R}^2 tale che $[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot x$ per ogni $x \in \mathbb{R}^2$.

3. Calcolare $\det \begin{pmatrix} 0 & 2i & 4-i \\ -1 & 0 & 2i \\ 3 & 1-i & -8i \end{pmatrix}$.

4. Se $f : \{x \in \mathbb{R}^{13} : x_7 - 4x_9 + 2x_{11} = 0\} \rightarrow \mathbb{R}^4$ è lineare e $f(e_2 - 5e_{10}) = 3e_1 + e_4$,
che dimensione può avere $\text{Ker}(f)$?

5. Risolvere $\begin{cases} x + 2y - z = -5 \\ 3x + 12y + z = 7 \\ x + 14y + 7z = 39. \end{cases}$

6. Risolvere $z^2 \bar{z} + 2i = z(i\bar{z} + 2)$.

7. Posto $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0\}$ e $Y = \text{Span}(3e_1 + 5e_2 - 2e_3)$ determinare la proiezione
su X di $e_1 - e_3$ rispetto alla decomposizione in somma diretta $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ◇



1. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare le applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tali che

$$f \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1+k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 2+k \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+k \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 2 \\ 3+2k \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3-k \end{pmatrix}.$$

- (A) (5 punti) Stabilire per quali k esiste un'unica tale f , per quali ne esistono infinite, e per quali non ne esiste nessuna.
- (B) (3 punti) Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ una tale f esiste ed è unica e non è iniettiva.
- (C) (4 punti) Per $k = -1$ determinare la matrice di f rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^3 sia in partenza sia in arrivo.

2. Al variare di $k, h \in \mathbb{R}$ considerare in \mathbb{R}^3 i sottospazi affini

$$E_k : \begin{cases} (1-k)x + 2ky - (3k+1)z = 2 \\ (k-3)x + 9y + 4kz = k \end{cases} \quad F_h = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ h \end{pmatrix} + \text{Span} \begin{pmatrix} 1+6h \\ h \\ h-4 \end{pmatrix}.$$

- (A) (3 punti) Trovare equazioni parametriche di E_k per $k = -2$
- (B) (3 punti) Trovare l'unico k_0 in \mathbb{R} tale che $\dim(E_{k_0}) \neq \dim(E_{(-2)})$ e trovare equazioni parametriche per E_{k_0} .
- (C) (3 punti) Determinare per quali $h \in \mathbb{R}$ si ha che F_h è parallelo a E_2 .
- (D) (3 punti) Determinare per quali $h \in \mathbb{R}$ si ha che $F_h + E_2$ non è \mathbb{R}^3 .

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.



Risposte esatte

5. ♥

1. $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

2. $-\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}$

3. $1 + 5i$

4. Tra 8 e 11

5. $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$

6. $|z| = \sqrt{2}$ o $z = i$

7. $\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}$

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ◇