Algebra Lineare — Scritto del 22/7/11 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Data $f : \mathbb{R}^2 \to \{x \in \mathbb{R}^3 :\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0\}$ tale che $f(2e_1 - e_2) = e_1 - e_2 - e_3$ e $f(e_1 - 3e_2) = 4e_1 - e_2 + e_3$ calcolare $f^{-1}(3e_1 + 2e_3)$.

2. Determinare la base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^2$ tale che $[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot x$ per ogni $x \in \mathbb{R}^2$.

3. Calcolare $\det \begin{pmatrix} 4-i & 5i & 0 \\ -1 & 0 & 2i \\ 3 & 1-i & -8i \end{pmatrix}$.

4. Se $f : \{x \in \mathbb{R}^{11} :\ x_7 - 4x_9 + 2x_{11} = 0\} \to \mathbb{R}^4$ è lineare e $f(e_2 - 5e_{10}) = 3e_1 + e_4$, che dimensione può avere $\mathrm{Ker}(f)$?

5. Risolvere $\begin{cases} 2x - y - z = 8 \\ 12x - 3y + z = 16 \\ 14x - y + 7z = -8. \end{cases}$

6. Risolvere $z^2\,\overline{z} + 2i = z(2i\,\overline{z} + 1)$.

7. Posto $X = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0\}$ e $Y = \mathrm{Span}(4e_1 - 5e_2 + 2e_3)$ determinare la proiezione su X di $e_1 + e_2 + e_3$ rispetto alla decomposizione in somma diretta $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Algebra Lineare — Scritto del 22/7/11 — Esercizî

1. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare le applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tali che

$$f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1+k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 2+k \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+k \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 2 \\ 3+2k \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3-k \end{pmatrix}.$$

(A) (5 punti) Stabilire per quali k esiste un'unica tale f, per quali ne esistono infinite, e per quali non ne esiste nessuna.

(B) (3 punti) Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ una tale f esiste ed è unica e non è iniettiva.

(C) (4 punti) Per $k = -1$ determinare la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ sia in partenza sia in arrivo.

2. Al variare di $k, h \in \mathbb{R}$ considerare in $\mathbb{R}^3$ is sottospazî affini

$$E_k : \begin{cases} (1-k)x + 2ky - (3k+1)z = 2 \\ (k-3)x + 9y + 4kz = k \end{cases} \qquad F_h = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ h \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1+6h \\ h \\ h-4 \end{pmatrix}.$$

(A) (3 punti) Trovare equazioni parametriche di E_k per $k = -2$

(B) (3 punti) Trovare l'unico k_0 in $\mathbb{R}$ tale che $\dim(E_{k_0}) \neq \dim(E_{(-2)})$ e trovare equazioni parametriche per E_{k_0}.

(C) (3 punti) Determinare per quali $h \in \mathbb{R}$ si ha che F_h è parallelo a E_2.

(D) (3 punti) Determinare per quali $h \in \mathbb{R}$ si ha che $F_h + E_2$ non è $\mathbb{R}^3$.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Algebra Lineare — Scritto del 22/7/11 — Quesiti

Risposte esatte

5. $\diamondsuit$

1. $-\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, -\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

3. $-6i$

4. Tra 6 e 9

5. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$

6. $|z| = 1$ o $z = 2i$

7. $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$