



Algebra Lineare — Scritto del 20/6/11 — Quesiti

Nome _____ Cognome _____ Matricola _____

1. Determinare $[18e_2 - 11e_1]_{\mathcal{B}}$ dove $\mathcal{B} = (3e_1 + 2e_2, 5e_2 - 2e_1)$.

2. Calcolare $(A^{-1})_{32}$ dove $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Se $f : \mathbb{C}^8 \rightarrow \mathbb{C}^3$ è lineare, $f(2ie_5 - e_7) = e_3 - ie_1$ e $\mathbb{C}^8 = W \oplus \text{Ker}(f)$, quanto può valere $\dim(W)$?

4. Se $A \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$, $A = (v_1, v_2, v_3, v_4)$, $\det(A) = -\frac{1}{4}$
e $B = (v_1 - 2v_4, 4v_3, v_2 + \sqrt{5}v_3, 2v_1 - v_2 + v_3 - v_4)$, quanto vale $\det(B)$?

5. Risolvere $\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 5 \\ 3x + 2y - 5z = 3 \\ x - 8y + 13z = 7. \end{cases}$

6. Sapendo che l'equazione $2z^3 - (4 + i)z^2 + 7z + 3i - 1 = 0$ ha la soluzione $z_1 = -\frac{i}{2}$, trovare le altre soluzioni.

7. Dati $W = \text{Span}(e_1 - 3e_2 + 2e_3, -2e_1 + 2e_2 + e_3)$ e $Z = \text{Span}(4e_1 - e_2 + 2e_3)$ considerare la decomposizione $\mathbb{R}^3 = W \oplus Z$ e determinare l'associata proiezione su W di $e_1 + 4e_2 + e_3$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ◇



1. In \mathbb{R}^4 considerare i sottospazi vettoriali

$$X = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 - x_3 = 0, 6x_1 + 3x_3 - x_4 = 0\}, \quad Y = \text{Span}(2e_1 - e_2 + 3e_3 + e_4, 4e_1 + 3e_2 + e_3 - 3e_4).$$

- (A) (1 punto) Calcolare le dimensioni di X e di Y .
- (B) (2 punti) Calcolare la dimensione di $X + Y$.
- (C) (2 punti) Determinare la base $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ di X ottenuta esplicitando dalle equazioni di X le coordinate di indice pari rispetto a quelle di indice dispari.
- (D) (2 punti) Determinare il vettore $v \in X$ tale che $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- (E) (2 punti) Detta \mathcal{C} la base di Y ottenuta per estrazione dall'insieme di generatori di Y assegnato, determinare $w \in Y$ tale che $[w]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- (F) (2 punti) Considerare l'applicazione lineare $f : X \rightarrow Y$ tale che $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ e calcolare $f(v)$, dove v è il vettore del punto (D).
- (G) (1 punto) Dire se esistono basi \mathcal{B}' di X e \mathcal{C}' di Y tali che $\det([f]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'}) = 0$.

2. Al variare di $k, h \in \mathbb{R}$ considerare in \mathbb{R}^3 i sottospazi affini

$$E_k = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} (2-k)x + 3ky - 2(k-2)z = 2 - 4k \\ (k-4)x + (1-4k)y + (5k-2)z = 7k - 1 \end{cases} \right\},$$

$$F_h = \begin{pmatrix} 1 \\ h \\ -2 \end{pmatrix} + \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 5h-1 \\ h-1 \\ h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4(h-1) \\ 2(h+1) \\ -h-6 \end{pmatrix} \right).$$

- (A) (2 punti) Determinare $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ e $k_0 \in \mathbb{R}$ tali che $\dim(E_k) = n_1$ per $k \neq k_0$ e $\dim(E_{k_0}) = n_2$.
- (B) (2 punti) Determinare $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ e $h_0 \in \mathbb{R}$ tali che $\dim(F_h) = m_1$ per $h \neq h_0$ e $\dim(F_{h_0}) = m_2$.
- (C) (3 punti) Esibire equazioni parametriche di E_k per $k = 1$ e per $k = k_0$.
- (D) (3 punti) Esibire equazioni cartesiane di F_h per $h = 2$ e per $h = h_0$.
- (E) (2 punti) Determinare la posizione reciproca di E_3 (cioè E_k per $k = 3$) e di F_h al variare di h .



Risposte esatte

5. ♥

1. $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

2. $\frac{4}{7}$

3. Tra 1 e 3

4. 3

5. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 22 \\ 13 \end{pmatrix}$

6. $z_2 = 1 + 2i, z_3 = 1 - i$

7. $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ◇