UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Algebra Lineare — Scritto del 20/6/11 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Determinare $[14e_1 - 9e_2]_{\mathcal{B}}$ dove $\mathcal{B} = (2e_1 - e_2,\ 3e_2 - 4e_1)$.

2. Calcolare $(A^{-1})_{2\,3}$ dove $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Se $f : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^9$ è lineare, $f(2ie_3 - e_4) = 7f(e_2 - ie_1)$ e $\mathbb{C}^9 = W \oplus \mathrm{Im}(f)$, quanto può valere $\dim(W)$?

4. Se $A \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$, $A = (v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4)$, $\det(A) = -\frac{1}{3}$
e $B = (2v_3 - v_1,\ 3v_4,\ v_2 + \sqrt{3}v_4,\ v_1 - v_2 - v_3 + v_4)$, quanto vale $\det(B)$?

5. Risolvere $\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 1 \\ 3x + y - 2z = 3 \\ x - 7y + 12z = -1. \end{cases}$

6. Sapendo che l'equazione $2z^3 - (6+i)z^2 + (6+5i)z + 1 - 3i = 0$ ha la soluzione $z_1 = \frac{i}{2}$, trovare le altre soluzioni.

7. Dati $W = \mathrm{Span}(e_1 - 2e_2 + 4e_3,\ -3e_1 + e_2 + e_3)$ e $Z = \mathrm{Span}(2e_1 - e_2 + 2e_3)$ considerare la decomposizione $\mathbb{R}^3 = W \oplus Z$ e determinare l'associata proiezione su W di $6e_1 - 4e_2 + 5e_3$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Algebra Lineare — Scritto del 20/6/11 — Esercizî

1. In $\mathbb{R}^4$ considerare i sottospazî vettoriali

$$X = \{x \in \mathbb{R}^4 : \ x_1 - x_2 - x_3 = 0,\ 6x_1 + 3x_3 - x_4 = 0\}, \qquad Y = \mathrm{Span}(2e_1 - e_2 + 3e_3 + e_4,\ 4e_1 + 3e_2 + e_3 - 3e_4).$$

(A) (1 punto) Calcolare le dimensioni di X e di Y.

(B) (2 punti) Calcolare la dimensione di $X + Y$.

(C) (2 punti) Determinare la base $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ di X ottenuta esplicitando dalle equazioni di X le coordinate di indice pari rispetto a quelle di indice dispari.

(D) (2 punti) Determinare il vettore $v \in X$ tale che $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(E) (2 punti) Detta $\mathcal{C}$ la base di Y ottenuta per estrazione dall'insieme di generatori di Y assegnato, determinare $w \in Y$ tale che $[w]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(F) (2 punti) Considerare l'applicazione lineare $f : X \to Y$ tale che $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ e calcolare $f(v)$, dove v è il vettore del punto (D).

(G) (1 punto) Dire se esistano basi $\mathcal{B}'$ di X e $\mathcal{C}'$ di Y tali che $\det\left([f]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'}\right) = 0$.

2. Al variare di $k, h \in \mathbb{R}$ considerare in $\mathbb{R}^3$ i sottospazî affini

$$E_k = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \ \begin{cases} (2-k)x + 3ky - 2(k-2)z = 2 - 4k \\ (k-4)x + (1-4k)y + (5k-2)z = 7k - 1 \end{cases} \right\},$$

$$F_h = \begin{pmatrix} 1 \\ h \\ -2 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 5h-1 \\ h-1 \\ h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4(h-1) \\ 2(h+1) \\ -h-6 \end{pmatrix} \right).$$

(A) (2 punti) Determinare $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ e $k_0 \in \mathbb{R}$ tali che $\dim(E_k) = n_1$ per $k \neq k_0$ e $\dim(E_{k_0}) = n_2$.

(B) (2 punti) Determinare $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ e $h_0 \in \mathbb{R}$ tali che $\dim(F_h) = m_1$ per $h \neq h_0$ e $\dim(F_{h_0}) = m_2$.

(C) (3 punti) Esibire equazioni parametriche di E_k per $k = 1$ e per $k = k_0$.

(D) (3 punti) Esibire equazioni cartesiane di F_h per $h = 2$ e per $h = h_0$.

(E) (2 punti) Determinare la posizione reciproca di E_3 (cioè E_k per $k = 3$) e di F_h al variare di h.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte esatte

5. $\diamondsuit$

1. $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

2. $\frac{4}{9}$

3. Tra 6 e 9

4. 1

5. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 19 \\ 11 \end{pmatrix}$

6. $z_2 = 1 + i,\ z_3 = 2 - i$

7. $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$