



1. Data $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0\}$ tale che $f(e_1) = -e_1 + e_2 + e_3$ e $f(e_2) = e_1 + 2e_2 + e_3$, calcolare $f^{-1}(3e_1 - e_3)$.
2. Data la base $\mathcal{B} = (1 - 3t, 3 + t)$ di $\mathbb{R}_{<1}[t]$, calcolare $[2 - t]_{\mathcal{B}}$.
3. Calcolare $\det \begin{pmatrix} 1 - i & 2 + 3i \\ 3 + 2i & 2 + i \end{pmatrix}$.
4. Se $f : \mathbb{R}^8 \rightarrow \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 = x_3 - x_4\}$ è lineare e non surgettiva e $Y \cap \text{Ker}(f) = \{0\}$, che dimensione può avere Y ?
5.
$$\begin{cases} x - 3y + z = 7 \\ 2x + y - z = -2 \\ x + 2y - 3z = -10. \end{cases}$$
6. $(1 - 2i)z - 2\bar{z} + 1 + 3i = 0$ con $z \in \mathbb{C}$.
7. Considerare la decomposizione $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$ con $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0\}$ e $Y = \text{Span}(e_1 + 2e_2 - e_3)$ e calcolare l'associata proiezione su X di $-2e_1 - e_3$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.



1. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ considerare le applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tali che

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ t-2 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} t+1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- (A) (6 punti) Stabilire quante tali f esistano al variare di t
- (B) (3 punti) Determinare per quale t una tale f esiste, è unica e non è iniettiva
- (C) (3 punti) Per $t = 0$ verificare che f esiste ed è unica e calcolare $f(e_1 + 4e_2 - 3e_3)$.

2. In \mathbb{R}^4 considerare i sottospazi affini

$$E : \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 8 \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases} \quad F = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \text{Span} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

- (A) (4 punti) Trovare equazioni parametriche di E .
- (B) (4 punti) Trovare equazioni cartesiane di F .
- (C) (4 punti) Descrivere la posizione reciproca di E ed F e quella delle loro giaciture, determinando poi $E + F$.



Risposte esatte

5. ♥

1. $-2e_1 + e_2$

2. $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. $3 - 14i$

4. Tra 0 e 2

5. $x = 1, y = -1, z = 3$

6. $z = 3 + i$

7. $e_1 + 6e_2 - 4e_3$

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ◇
