UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Algebra Lineare — Scritto del 11/2/11 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Dati 10 polinomi che generano $\{p(z) \in \mathbb{C}_{\leq 7}[z] : \ p(i) = p'(-i)\}$, quanti bisogna eliminarne per avere una base?

2. Determinare la molteplicità m di $-i$ come radice di $p(z) = iz^4 - 3z^3 + (1-4i)z^2 + (3+2i)z - 1 + i$ e il quoziente $q(z)$ della divisione $p(z) : (z+i)^m$.

3. Se $V = \{x \in \mathbb{R}^7 : \ x_2 + 5x_3 = 2x_7\}$, $M \in \mathcal{M}_{2\times 7}(\mathbb{R})$, $W = \{x \in V : \ M \cdot x = 0\}$ e $Z \subset V$ sono tali che $V = W \oplus Z$, che dimensione può avere Z?

4. Se un sistema lineare non omogeneo di 7 equazioni in 10 incognite ammette soluzione, può tale soluzione essere unica?

5. Data $A = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{C})$ tale che $\det(A) = 2 + i$, calcolare $\det(B)$ dove $B = (v_2 - iv_4, v_3 - 3v_4, 2v_1 + iv_2, 2v_1 - iv_3)$.

6. Date $A \in \mathcal{M}_{7\times 8}(\mathbb{R})$ e B una sottomatrice 3×3 di A, cosa si può concludere su A sapendo che $\det(B) \neq 0$ e che $\det(C) = 0$ per ogni C sottomatrice 6×6 di A contenente B?

AL10 **7.** Posto $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ 6x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0\}$ e $Y = \mathrm{Span}(2e_1 + 3e_2 + 5e_3)$, determinare la proiezione di e_3 su X rispetto alla decomposizione $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$.

AL08 **8.** Trovare gli autovalori di $\begin{pmatrix} 1+i & i \\ 1-3i & 1-2i \end{pmatrix}$ e una base di $\mathbb{C}^2$ che la diagonalizza.

GAI **9.** Per quali $k \in \mathbb{R}$ l'equazione $kx^2 + 4xy + 3y^2 - 2x + 4y = 1$ definisce un'iperbole?

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Algebra Lineare — Scritto del 11/2/11 — Esercizî

1. Al variare di $k, h \in \mathbb{R}$ considerare in $\mathbb{R}^4$ considerare i sottospazî affini

$$E_k = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ k \\ -1 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 2+k \\ 3 \\ 2k \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ k-5 \\ 4 \\ k-3 \end{pmatrix} \right),$$

$$F_h : \begin{cases} 2x_1 + hx_2 + 4x_3 + 2(h-1)x_4 = 5h \\ (h-1)x_1 + 3x_2 + 2(h-1)x_3 + 9x_4 = 1 - 7h. \end{cases}$$

(A) (2 punti) Trovare $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ e $k_0 \in \mathbb{R}$ tali che $\dim(E_k) = n_1$ per $k \neq k_0$ e $\dim(E_{k_0}) = n_2$;

(B) (2 punti) Trovare $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ e $h_0 \in \mathbb{R}$ tali che $\dim(F_h) = m_1$ per $h \neq h_0$ e $\dim(F_{h_0}) = m_2$;

(C) (3 punti) Trovare equazioni per E_k per $k = 2$ e per $k = k_0$;

(D) (3 punti) Trovare equazioni cartesiane parametriche per F_h per $h = 1$ e per $h = h_0$;

(E) (2 punti) Determinare la posizione reciproca tra E_1 ed F_1 e quella tra E_{-1} ed F_1.

2. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare le applicazioni lineari $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tali che

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+k \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 2 \\ k+1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(A) (5 punti) Per ogni $k \in \mathbb{R}$ determinare quante sono le f_k.

(B) (2 punti) Determinare l'unico $k_0 \in \mathbb{R}$ per il quale f_{k_0} esiste unica e non è iniettiva.

(C) (3 punti) Per $k = -1$ determinare $[f_k]_{\mathcal{E}(3)}^{\mathcal{E}(3)}$.

AL10 (D) (2 punti) Per il valore k_0 del punto (B) provare che $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}(f_{k_0}) \oplus \mathrm{Ker}(f_{k_0})$ e determinare la proiezione di $5e_1$ su $\mathrm{Im}(f_{k_0})$ rispetto a questa decomposizione.

AL08 (E) (2 punti) Per $k = -17$ provare che f_{-17} ha almeno un autovalore reale.

GAI (F) (2 punti) Per il valore k_0 del punto (B) trovare tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ unitari e ortogonali a $\mathrm{Im}(f_{k_0})$.

Risposte esatte

5. ♡

1. 3

2. $m = 2$, $q(z) = iz^2 - z + 1 - i$

3. Tra 0 e 2

4. No, le soluzioni sono un sottospazio affine di dimensione almeno 3

5. $10 - 10i$

6. Che il rango è compreso tra 3 e 5

7. $8e_1 + 12e_2 + 21e_3$

8. 2 e $-i$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1+i \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ i-2 \end{pmatrix}$

9. $k < \frac{4}{3}$ con $k \neq -1$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢