



Algebra Lineare — Scritto del 4/7/11 — Quesiti

Nome _____ Cognome _____ Matricola _____

1. Dati 3 vettori linearmente indipendenti in $W = \{z \in \mathbb{C}^9 : iz_2 + 7z_9 = (1+i)z_5 - 4z_1 = 6z_3 - 4iz_8\}$, quanti vettori bisogna aggiungere per ottenere una base di W ?

2. Se $f : \mathbb{R}^7 \rightarrow \{x \in \mathbb{R}^4 : 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0\}$ è lineare e $e_1 + 2e_2 \notin \text{Im}(f)$, che dimensione può avere $\text{Ker}(f)$?

3. Date la base $\mathcal{B} = (e_1 + e_2 - e_3, 2e_1 - 3e_2 + e_3)$ di $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0\}$ e la $f : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}^{(2)}} = \begin{pmatrix} 9 & -11 \\ -17 & 54 \end{pmatrix}$, calcolare $f(3e_1 - 2e_2)$.

4. Data $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ calcolare $(A^{-1})_{32}$.

5. Una matrice $A \in \mathcal{M}_{5 \times 4}(\mathbb{R})$ ha rango 3. Una sua sottomatrice B è 2×2 e ha determinante non nullo. Quante orlate di B in A possono avere determinante non nullo?

6. Sapendo che il polinomio $z^3 + (2i-1)z^2 + (1-i)z + 2(i-1)$ ha la radice $z_1 = 1-i$, trovare le altre.

7. Dati $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : 3x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 0\}$ e $Y = \text{Span}(2e_1 + 5e_2 + 11e_3)$, determinare la proiezione su X di $e_1 - e_2 + 2e_3$ rispetto alla decomposizione $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ◇ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ◇



1. Al variare di $h \in \mathbb{R}$ considerare il sottospazio W_h di $\mathbb{R}^4$ definito dal sistema lineare

$$\begin{cases} (1-h)x + y - 2z - w = 0 \\ 2x + (1+h)y + z - 2w = 0 \\ x + 2y - 3z - (1+h)w = 0. \end{cases}$$

- (A) (3 punti) Determinare una base di $W_{(-1)}$.
- (B) (3 punti) Trovare $h_0 \in \mathbb{R}$ tale che $\dim(W_{h_0}) \neq \dim(W_{(-1)})$ e una base di W_{h_0} .
- (C) (2 punti) Provare che $W_{(-1)} \cap W_{h_0} = \{0\}$.
- (D) (2 punti) Dedurre da (C) che posto $T = W_{(-1)} + W_{h_0}$ si ha $T = W_{(-1)} \oplus W_{h_0}$.
- (E) (2 punti) Provare che $2e_2 + 3e_3 + 2e_4$ appartiene a T e calcolare la sua proiezione su W_{h_0} rispetto alla decomposizione del punto (D).

2. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare in $\mathbb{R}^3$ i sottospazi affini

$$E_k = \begin{pmatrix} k+1 \\ -k \\ 2k-1 \end{pmatrix} + \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2-3k \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9-10k \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right), \quad F_k = \begin{pmatrix} -3 \\ k+1 \\ k+4 \end{pmatrix} + \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2k-1 \\ 8 \end{pmatrix} \right).$$

- (A) (2 punti) Determinare equazioni cartesiane di E_2 .
- (B) (2 punti) Provare che F_k è sempre una retta e determinarne due equazioni cartesiane.
- (C) (3 punti) Trovare l'unico $k_0 \in \mathbb{R}$ tale che $\dim(E_{k_0}) \neq \dim(E_2)$ ed equazioni cartesiane di E_{k_0} .
- (D) (3 punti) Determinare l'unico $k_1 \in \mathbb{R}$ tale che E_{k_1} ed F_{k_1} sono paralleli tra loro.
- (E) (2 punti) Per il valore k_0 del punto (C) provare che $E_{k_0} + F_{k_0} = \mathbb{R}^3$.



Risposte esatte

5. $\diamond$

1. 4

2. Tra 5 e 7

3. $\begin{pmatrix} -2 \\ 37 \end{pmatrix}$ 4. $-\frac{1}{9}$

5. Almeno una, e fino a tutte e 6, come ad esempio se $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e B è in alto a sinistra

6. $z_2 = i$, $z_3 = -2i$ 7. $\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 24 \end{pmatrix}$

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamond$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamond$
