UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Geometria — Scritto del 10/2/11 — Quesiti

Nome ______________ **Cognome** ______________ **Matricola** ______

1. Determinare gli autovalori di $\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 9 & -5 \end{pmatrix}$ e una base di $\mathbb{R}^2$ che la diagonalizza.

2. Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & k & 0 \\ k-2 & 2 & k^2 \end{pmatrix}$ non è diagonalizzabile.

3. Trovare $z \in \mathbb{C}^2$ con prima componente immaginaria pura, unitario e ortogonale a $(1-i)e_1+(2+i)e_2$.

4. Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ costituita da autovettori di $\begin{pmatrix} k^3 & k^2-3 \\ 2k & 1-k \end{pmatrix}$.

5. Determinare il tipo affine della quadrica di equazione $3y^2+3z^2-6xy+2xz-10yz+x=1$.

Geom **6.** Considerando $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ come l'insieme dei punti all'infinito di $\mathbb{R}^3$, determinare i punti di intersezione tra $\{[1-t : t-6 : t+2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) :\ t \in \mathbb{R}\}$ e l'insieme dei punti all'infinito della quadrica di equazione $2x^2+yz-z^2+7x-2y+5=0$.

Geom **7.** Calcolare $\int_\alpha \cos(xy)\cdot(y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y)$ dove $\alpha(t) = \left(\frac{\pi}{2}t^2, t^3\right)$ con $t \in [-1,1]$.

GAII **8.** Sapendo che il polinomio $2z^3+(2-5i)z^2-(8+3i)z+3i-1$ ha la radice $1+i$, trovare le altre.

GAII **9.** Determinare $[7e_1-5e_2]_{\mathcal{B}}$ dove $\mathcal{B} = (2e_1-e_2, -e_1+e_2)$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

IN SUPREMÆ DIGNITATIS 1343

Geometria — Scritto del 10/2/11 — Esercizî

1. In $\mathbb{R}^3$ considerare $V = \mathrm{Span}(e_1 + 6e_2 + 2e_3, -3e_1 + 2e_2 + 4e_3)$.

(A) (3 punti) Determinare tutte le applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tali che $|f(x)|$ è la distanza di x da V per ogni $x \in \mathbb{R}^3$.

(B) (3 punti) Scelta la f di cui al punto (A) tale che $f(3e_2) = 1$ e posto $g(x) = 3f(x)$ determinare la matrice $M = \begin{pmatrix} 7 & -4 & g(e_1+e_2) \\ 12 & g(4e_3 - e_2) & 2 \\ g(e_2 - e_1) & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

(C) (6 punti) Trovare gli autovalori di M con le loro molteplicità algebriche e geometriche, nonché i relativi autospazî, stabilendo se M sia diagonalizzabile.

Geom **2.** Considerare la funzione $\alpha : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = (t^2, \sin(\pi \cdot t))$ e indicare con β_- e β_+ le restrizioni di α rispettivamente a $[-1, 0]$ e a $[0, 1]$.

(A) (3 punti) Provare che α è una curva liscia e che è semplice e chiusa ma che la sua immagine non ammette ovunque una retta tangente.

(B) (3 punti) Provare che per ogni forma esatta ω definita su un aperto contenente α si ha che $\int_{\beta_-} \omega = -\int_{\beta_+} \omega$ ed esibire una forma ω_0 chiusa per cui ciò non accade.

(C) (3 punti) Calcolare $\int_{\alpha} y \, \mathrm{d}x$.

(D) (3 punti) Calcolare la curvatura di α nel punto $\alpha(\frac{1}{4})$.

GAII **3.** Considerare $V = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0\}$ e $f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ 2x_3 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$.

(A) (3 punti) Verificare che risulta così definita un'applicazione lineare $f : V \to V$.

(B) (2 punti) Provare che $\mathcal{B} = (e_1 - 2e_2 - e_3, 5e_1 - 2e_2 + e_3)$ e $\mathcal{B}' = (7e_1 + 2e_2 + 5e_3, 11e_1 + 2e_2 + 7e_3)$ sono basi di V e determinare la matrice M di cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.

(C) (2 punti) Determinare $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

(D) (2 punti) Determinare $[f]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}$.

(E) (2 punti) Verificare la formula di cambiamento di base $[f]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} = M^{-1} \cdot [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot M$.

Risposte esatte

5. ♢

1. 4 e -3; $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}$

2. $k = 0$ e $k = 1$

3. $\pm\frac{1}{\sqrt{35}}\begin{pmatrix} 5i \\ 3-i \end{pmatrix}$

4. $k = 3$ e $k = -1$

5. Paraboloide iperbolico

6. $[2 : -7 : 1]$ e $[-6 : 1 : 9]$

7. 2

8. $\frac{i}{2},\ i-2$

9. $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢