

$$(1A) \quad f(x) = \pm \frac{1}{3}(2x_1 - x_2 + 2x_3)$$

$$(1B) \quad M = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -1 \\ 12 & -9 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

(1C) Autovalore  $-2$  con molteplicità algebrica  $2$  e geometrica  $1$ , e autospazio generato da  $e_1 + 2e_2 + e_3$ ; autovalore  $3$  con molteplicità algebrica e geometrica  $1$ , e autospazio generato da  $e_1 + e_2$ ; la  $M$  non è diagonalizzabile

(2A)  $\alpha'(t) = (2t, \pi \cdot \cos(\pi \cdot t))$  non si annulla mai;  $t_1^2 = t_2^2$  con  $t_1 \neq t_2$  se solo se  $t_2 = -t_1$  e  $t_1 > 0$  (o viceversa), ma  $\sin(-\pi \cdot t_1) = \sin(\pi \cdot t_1)$  con  $t_1 \in (0, 1]$  se e solo se  $t = 1$ , dunque  $\alpha$  è semplice e chiusa; poiché  $\alpha'(-1) \neq \alpha'(1)$  l'immagine di  $\alpha$  non ammette vettore tangente in  $\alpha(-1) = \alpha(1)$

$$(2B) \quad 0 = \int_{\alpha} \omega = \int_{\beta_-} \omega + \int_{\beta_+} \omega;$$

$$\omega_0 = \frac{(x - \frac{1}{2}) dy - y dx}{(x - \frac{1}{2})^2 + y^2}$$

$$(2C) \quad \frac{4}{\pi}$$

$$(2D) \quad -\frac{2\sqrt{2}\pi(\pi+4)}{(1+2\pi^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(3A) Certamente  $F(x) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ 2x_3 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$  è lineare da  $\mathbb{R}^3$  a  $\mathbb{R}^3$ ; inoltre  $(2 \ 3 \ -4) \cdot F(x) = -(2x_1 + 3x_2 - 4x_3)$ , dunque  $F(V) \subset V$ , e la  $f$  si ottiene restringendo  $F$  a  $V$  e abbreviando l'immagine a  $V$

$$(3B) \quad M = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(3C) \quad [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$(3D) \quad [f]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \frac{19}{2} & \frac{29}{2} \\ -\frac{11}{2} & -\frac{17}{2} \end{pmatrix}$$

$$(3E) \quad M^{-1} = M$$