UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Geometria — Scritto del 24/2/11 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Determinare tutti i vettori unitarî di $\mathbb{R}^3$ che formano un angolo di $\frac{\pi}{3}$ sia con $e_1 + e_2$ sia con $e_2 - e_3$.

2. Per $k \in \mathbb{C}$ considerare la matrice $M_k = \begin{pmatrix} 2ik & k^2+i \\ (1-i)\overline{k} & -3 \end{pmatrix}$. Determinare k in modo che M_k abbia autovalori reali ed esista una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ costituita da autovettori di M_k.

3. Sapendo che $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ è antisimmetrica e ha l'autovalore $4i$, determinare $X \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ coniugata ad A con due soli coefficienti non nulli.

4. Determinare i punti di intersezione di $\{[t-1 : 2-t : 4-t] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : \ t \in \mathbb{R}\}$ con l'insieme dei punti all'infinito della quadrica di equazione $2x^2 + 3xy + 2yz - 5x + 3z = 7$.

5. Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ la quadrica di equazione $kx^2 + 2y^2 + 6xy - 4xz - 2yz + 2x = 5$ è un paraboloide e determinarne il tipo.

Geom **6.** Determinare le parabole il cui punto all'infinito è anche un punto all'infinito dell'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = 1$.

Geom **7.** Calcolare $\int_\alpha \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$ con $\alpha : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = (\sin(\pi t), 1 - 2t^2)$.

GAII **8.** Date $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con $f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -3x_1 + x_2 \end{pmatrix}$ e $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$ determinare $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$.

GAII **9.** Per quale $z \in \mathbb{C}$ la matrice $\begin{pmatrix} i-z & 2+3i \\ 1-i & 2i-1 \end{pmatrix}$ non è invertibile?

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria — Scritto del 24/2/11 — Esercizî

1. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare la matrice $M_k = \begin{pmatrix} 8-3k & k\sqrt{3} & (3k+2)\sqrt{2} \\ k\sqrt{3} & 3k+12 & k\sqrt{6} \\ (3k+2)\sqrt{2} & k\sqrt{6} & 10 \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Provare che per ogni k esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ che la diagonalizza.

(B) (5 punti) Per $k = 1$, sapendo che il coefficiente del termine di primo grado nel polinomio caratteristico di M_k vale 216, trovarne gli autovalori e una base che la diagonalizza.

(C) (3 punti) Provare che la base del punto (B) diagonalizza M_k per ogni k.

(D) (2 punti) Stabilire per quali k la matrice M_k definisce un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$.

Geom **2.** Considerare la curva $\alpha : [0,3] \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = (t^3 - 6t, t^2 - 2t)$.

(A) (3 punti) Provare che α è una curva liscia e semplice.

(B) (3 punti) Determinare i punti nell'intorno dei quali l'immagine di α non può essere descritta come grafico di una coordinata in funzione dell'altra.

(C) (3 punti) Calcolare $\int_\alpha e^{xy}(y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y)$.

(D) (3 punti) Calcolare la curvatura di α nel punto $\alpha(2)$.

GAII **3.** Considerare $W = \{z \in \mathbb{C}^3 : \ (1-i)z_1 + (2+i)z_2 + (3-2i)z_3 = 0\}$

(A) (4 punti) Determinare $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ tale che posto $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$ e $w_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ i \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ si abbia che $\mathcal{B} = (w_1, w_2)$ è una base di W.

(B) (4 punti) Considerare l'insieme T delle $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ lineari tali che $f(W) \subset W$ e, definita $g : W \to W$ come $g(w) = f(w)$ per ogni $w \in W$, si abbia $[g]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1-i & 2 \\ 3i & 1+i \end{pmatrix}$. Descrivere $f_0, f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^3)$ tali che $T = \{f_0 + t_1 f_1 + t_2 f_2 + t_3 f_3 : \ t \in \mathbb{C}^3\}$.

(C) (4 punti) Considerare $f \in T$ tale che $f(e_1) = -28ie_1$ e calcolare $f\begin{pmatrix} 3+4i \\ 3 \\ -2-3i \end{pmatrix}$.

Geometria — Scritto del 24/2/11 — Quesiti

Risposte esatte

5. $\diamondsuit$

1. $\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_3),\ \frac{1}{3\sqrt{2}}(-e_1 + 4e_2 + e_3)$

2. $k = i$

3. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. $[2 : -1 : 1]$ e $[3 : -2 : 0]$

5. $k = 4$; iperbolico

6. Quelle che hanno asse parallelo a una delle bisettrici dei quadranti, cioè quelle di equazione $x + y = a(x - y)^2 + b(x - y) + c$ oppure $x - y = a(x + y)^2 + b(x + y) + c$ con $a \neq 0$

7. -2π

8. $\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -13 & -5 \end{pmatrix}$

9. $z = \frac{1}{5}(3 + 16i)$

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$