UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Geometria — Scritto del 19/2/10 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Determinare un vettore di $\mathbb{C}^2$ unitario, ortogonale a $(2-i)e_1+(3+i)e_2$ e avente prima coordinata immaginaria pura.

2. Per quali $k \in \mathbb{R}$ è diagonalizzabile la matrice $\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ k+1 & -1 & 0 \\ k-1 & k & k^2 \end{pmatrix}$?

3. Determinare l'intersezione in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ di $\{[3+2t : t+1 : -2-t] : \ t \in \mathbb{R}\}$ e $\{[1-s : 2-s : 2s-3] : s \in \mathbb{R}\}$.

4. Per quali $k \in \mathbb{R}$ la conica di equazione $4x^2+4kxy+y^2+4x+2k^2y+5=0$ è una parabola?

5. Determinare il tipo affine della quadrica di equazione $9x^2+3y^2-3z^2-2xy-10xz+4yz-2x+4y=0$.

Geom **6.** Determinare gli autovalori della matrice hessiana di $f(x,y)=\sin(y)\cdot e^{\cos(x)}$ nel punto $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$.

Geom **7.** Calcolare l'integrale della forma $3x^2y^3\,\mathrm{d}x - x^3\,\mathrm{d}y$ sul bordo del quadrato di vertici $(\pm 1, \pm 1)$.

GAII **8.** Se $V+W=\{z\in\mathbb{C}^7 : \ 3z_1 = iz_7\}$, $V\cap W=\{0\}$, $\dim_{\mathbb{C}}(W)=2$ e sono dati 11 generatori di V, quanti bisogna scartarne per ottenere una base?

GAII **9.** Se $A=\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, $\det(A)=-\frac{1}{5}$ e $B=\begin{pmatrix} 3r_2-r_3 \\ r_1+2r_3 \\ 4r_2-r_1 \end{pmatrix}$, quanto vale $\det(B)$?

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Geometria — Scritto del 19/2/10 — Esercizî

1. Al variare di $k \in \mathbb{C}$ considerare $A_k = \begin{pmatrix} 2 & ik & -1 \\ -ik & k^2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Stabilire per quali k la A_k è hermitiana.

(B) (4 punti) Tra i k trovati al punto precedente, stabilire per quali la forma sesquilineare hermitiana associata ad A_k è un prodotto scalare su $\mathbb{C}^3$.

(C) (3 punti) Esibire una base ortonormale di $\mathbb{C}^3$ costituita da autovettori di $A_{(-1)}$ (cioè per $k = -1$).

(D) (3 punti) Esibire una base ortogonale di $\mathbb{C}^3$ costituita da autovettori di A_2 (cioè per $k = 2$).

Geom **2.** Considerare la funzione $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da $\alpha(t) = (2t^2, 1 - t^3, t^4)$.

Geom (A) (1 punto) Stabilire se α parametrizza una curva semplice.

Geom (B) (2 punti) Determinare i punti nei quali α non è la parametrizzazione di una curva liscia.

Geom (C) (5 punti) Determinare il riferimento di Frénet di α nel punto $t = 1$.

Geom (D) (4 punti) Detta β la proiezione sul piano $z = 0$ delle restrizione di α all'intervallo $[0, 1]$, calcolare $\int_\beta (y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y)$.

GAII **3.** Posto $V = \{p(t) \in \mathbb{R}_{\leq 2}[t] : p(1) = 0\}$ considerare le applicazioni $f, g : \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}[t]$ date da $f(p(t)) = t \cdot p'(t) - t^2 \cdot p(-1)$ e $g(p(t)) = p(t) - p(1)$.

GAII (A) (2 punti) Verificare che la formula $h(p(t)) = g(f(p(t)))$ definisce un'applicazione lineare h da V in sé stesso.

GAII (B) (3 punti) Determinare $A = [h]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ dove $\mathcal{B} = (2 - t - t^2, 1 - 3t + 2t^2)$.

GAII (C) (2 punti) Determinare A^{-1}.

GAII (D) (3 punti) Provare che A è diagonalizzabile.

GAII (E) (2 punti) Trovare una base che diagonalizza h.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Geometria — Scritto del 19/2/10 — Quesiti

Risposte esatte

5. $\diamondsuit$

1. $\pm\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2i \\ 1-i \end{pmatrix}$

2. $k \neq 0$ e $k \neq 1$

3. Il punto $[1 : 0 : -1]$

4. $k = -1$

5. Iperboloide a una falda

6. $-\frac{\sqrt{3e}}{16}\left(3 \pm \sqrt{41}\right)$

7. -8

8. 7

9. 2

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$