UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

IN SUPREMÆ DIGNITATIS
1343

Geometria — Scritto del 14/1/10 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Calcolare la proiezione ortogonale in $\mathbb{R}^3$ di $2e_1 + e_2 - 3e_3$ su $\mathrm{Span}(3e_1 + e_2, 2e_2 - 5e_3)$.

2. Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ e $A = {}^{t}A$ si può concludere che A ha autovalori reali?

3. Trovare una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ che diagonalizza $\begin{pmatrix} -1 & 2i \\ -2i & 3 \end{pmatrix}$.

4. Quali punti di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sono i punti all'infinito dell'insieme $\left\{\left(\frac{1}{t}, t - \frac{1}{t}, -t\right) \in \mathbb{R}^3 : \ t \in \mathbb{R}, \ t > 0\right\}$?

5. Determinare il tipo affine della quadrica di equazione $z^2 - xy + xz - 3yz - y + 1 = 0$.

Geom **6.** Determinare l'intersezione in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ degli insiemi $\{[t : t^2 : -t^3] : \ t \in \mathbb{R}, \ t \neq 0\}$ e $\{[2s : 4 : s^2] : \ s \in \mathbb{R}\}$.

Geom **7.** Determinare una funzione g tale che la forma $g(xy)\,\mathrm{d}x + \frac{x}{y}\,\mathrm{d}y$ sia chiusa.

GAII **8.** Posto $g(x) = \begin{pmatrix} 2x_2 - 2x_1 \\ 2x_1 - x_3 \\ -3x_2 - x_3 \end{pmatrix}$ e $W = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 0\}$ verificare che $g(W) \subset W$ e determinare $[g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ dove $\mathcal{B} = (e_2 - 2e_1, 2e_1 + 3e_3)$.

GAII **9.** Data $A = (v, \ w, \ z) \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ tale che $\det(A) = 1 + i$ calcolare $\det(3v + iw, \ w - 2iz, \ iz + z)$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Geometria — Scritto del 14/1/10 — Esercizî

1. Considerare la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ e l'associata applicazione $\langle \cdot | \cdot \rangle_A : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$.

(A) (4 punti) Determinare il segno degli autovalori di A.

(B) (4 punti) Stabilire per quali j la $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ definisce un prodotto scalare sul sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di equazione $x_j = 0$.

(C) (4 punti) Detta B la matrice ottenuta da A eliminando l'ultima riga e l'ultima colonna, esibire una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di B.

Geom **2.** Considerare la curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da $\alpha(t) = (2t - \cos t, t + 2\sin t, t^2)$.

(A) (3 punti) Stabilire se α sia semplice.

(B) (3 punti) Detta β la restrizione di α all'intervallo $[0, \pi]$ calcolare $\int_\beta (x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)$.

(C) (3 punti) Calcolare la curvatura e la torsione di α in $t = 0$.

(D) (3 punti) Detta $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione crescente tale che $\tau(0) = 0$ e $\gamma(s) = \alpha(\tau(s))$ è in parametro d'arco, calcolare $\tau''(0)$.

GAII **3.** Al variare di $k \in \mathbb{C}$ considerare la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & -i & 1+ik \\ 0 & 1 & 2i \\ k+i & -i & 0 \end{pmatrix}$.

(A) (4 punti) Stabilire per quali k la A_k non è invertibile, verificando che esiste un unico valore non reale k_0 per cui ciò accade.

(B) (4 punti) Per $k = k_0$ verificare che la prima e la terza colonna di A_{k_0} costituiscono una base $\mathcal{B}$ dell'immagine W di A_{k_0} e determinare $[g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ dove $g(w) = A_{k_0} \cdot w$.

(C) (4 punti) Per $k = 0$ calcolare il coefficiente di posto $(2, 3)$ in A^{-1}.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Geometria — Scritto del 14/1/10 — Quesiti

Risposte esatte

5. ♡

1. $\frac{1}{22}(39e_1 + 37e_2 - 60e_3)$

2. No, ad esempio $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$

3. $\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\begin{pmatrix} i \\ 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\begin{pmatrix} i \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$

4. $[0 : 1 : -1]$ e $[1 : -1 : 0]$

5. Iperboloide a una falda

6. Il punto $[-1 : 1 : 1]$

7. $g(t) = \log |t|$

8. $-\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

9. $1 + 5i$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢