



Geometria — Scritto del 14/1/10 — Quesiti

Nome _____ Cognome _____ Matricola _____

1. Calcolare la proiezione ortogonale in $\mathbb{R}^3$ di $e_1 + 3e_2 - 2e_3$ su $\text{Span}(2e_1 - e_2, 2e_2 - 5e_3)$.

2. Se $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ e $A \cdot {}^tA = I_n$ si può concludere che A ha autovalori reali?

3. Trovare una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ che diagonalizza $\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$.

4. Quali punti di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sono i punti all'infinito dell'insieme $\{(t, \frac{1}{t}, t - \frac{1}{t}) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}, t > 0\}$?

5. Determinare il tipo affine della quadrica di equazione $z^2 + xy + 2xz - 3yz + y + 1 = 0$.

Geom 6. Determinare l'intersezione in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ degli insiemi $\{[t : t^2 : t^3] : t \in \mathbb{R}, t \neq 0\}$ e $\{[2s : 4 : -s^2] : s \in \mathbb{R}\}$.

Geom 7. Determinare una funzione f tale che la forma $\frac{y}{x} dx + f(xy) dy$ sia chiusa.

GAII 8. Posto $g(x) = \begin{pmatrix} x_3 - x_2 \\ -2x_3 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$ e $W = \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0\}$ verificare che $g(W) \subset W$ e determinare $[g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ dove $\mathcal{B} = (3e_1 + 2e_2, 4e_2 + 3e_3)$.

GAII 9. Data $A = (v, w, z) \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{C})$ tale che $\det(A) = 1 - i$ calcolare $\det(2v + iz, w - 3iv, 2iw - z)$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ◇ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ◇



1. Considerare la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ e l'associata applicazione $\langle \cdot | \cdot \rangle_A : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$.

- (A) (4 punti) Determinare il segno degli autovalori di A .
- (B) (4 punti) Stabilire per quali j la $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ definisce un prodotto scalare sul sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di equazione $x_j = 0$.
- (C) (4 punti) Detta B la matrice ottenuta da A eliminando l'ultima riga e l'ultima colonna, esibire una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di B .

Geom 2. Considerare la curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da $\alpha(t) = (2t - \cos t, t + 2 \sin t, t^2)$.

- (A) (3 punti) Stabilire se α sia semplice.
- (B) (3 punti) Detta β la restrizione di α all'intervallo $[0, \pi]$ calcolare $\int_{\beta} (x \, dy - y \, dx)$.
- (C) (3 punti) Calcolare la curvatura e la torsione di α in $t = 0$.
- (D) (3 punti) Detta $\tau : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione crescente tale che $\tau(0) = 0$ e $\gamma(s) = \alpha(\tau(s))$ è in parametro d'arco, calcolare $\tau''(0)$.

GAII 3. Al variare di $k \in \mathbb{C}$ considerare la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 + ik \\ 0 & 1 & 2i \\ k + i & -i & 0 \end{pmatrix}$.

- (A) (4 punti) Stabilire per quali k la A_k non è invertibile, verificando che esiste un unico valore non reale k_0 per cui ciò accade.
- (B) (4 punti) Per $k = k_0$ verificare che la prima e la terza colonna di A_{k_0} costituiscono una base $\mathcal{B}$ dell'immagine W di A_{k_0} e determinare $[g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ dove $g(w) = A_{k_0} \cdot w$.
- (C) (4 punti) Per $k = 0$ calcolare il coefficiente di posto $(2, 3)$ in A^{-1} .



Risposte esatte

5. $\diamond$

1. $\frac{1}{47}(2e_1 + 51e_2 - 130e_3)$
2. No, ad esempio la matrice 2×2 di una rotazione reale
3. $\frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} 2i \\ 1 - \sqrt{5} \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} 2i \\ 1 + \sqrt{5} \end{pmatrix}$
4. $[1 : 0 : 1]$ e $[0 : 1 : -1]$
5. Iperboloide a due falde
6. Il punto $[1 : -1 : 1]$
7. $f(t) = \log |t|$
8. $-\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$
9. $4(1 + 2i)$

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamond$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamond$
