UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Geometria — Scritto del 11/6/10 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} 15k^2-21k+7 & 35k^2-49k+14 \\ -6k^2+9k-3 & -14k^2+21k-6 \end{pmatrix}$ non è diagonalizzabile.

2. Posto $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 = 2x_2 + 3x_3\}$ esibire una base che diagonalizza $f : X \to X$ lineare tale che $f(2e_1 + e_2) = e_1 - 4e_2 + 3e_3$ e $f(3e_1 + e_3) = 3e_1 - 6e_2 + 5e_3$.

3. Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} k^5 & 2-k \\ k-6 & e^{-\pi} \end{pmatrix}$ ammette una base ortonormale di autovettori.

4. Determinare un vettore di $\mathbb{C}^2$ unitario, ortogonale a $(1+2i)e_1 + (1-i)e_2$ e avente prima coordinata immaginaria pura.

5. Determinare il tipo affine della quadrica di equazione $3x^2-9y^2+6xy+6xz-6yz-3x+y-2z+1=0$.

Geom **6.** Determinare l'intersezione tra $\{[t+5 : t : 2t-2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : \ t \in \mathbb{R}\}$ e l'insieme dei punti all'infinito della quadrica di equazione $xy - z^2 - 5y + 8z + 1 = 0$.

Geom **7.** Posto $R = [0,2] \times [-1,1]$ e $\omega = \left(e^{\cos^3 x} - 3xy^3\right)\,\mathrm{d}x + (\sin y^2 + 2x^2)\,\mathrm{d}y$ calcolare $\int_{\partial R} \omega$.

GAII **8.** Sapendo che $z = -\frac{i}{2}$ è una soluzione di $6z^3 + (13i-6)z^2 - (1+i)z + 2i - 1 = 0$ trovare le altre.

GAII **9.** Determinare la base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{C}^2$ tale che $[z]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} (1+i)z_1 + 2z_2 \\ -iz_1 + (1-i)z_2 \end{pmatrix}$ per ogni $z \in \mathbb{C}^2$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria — Scritto del 11/6/10 — Esercizî

1. Considerare il vettore $v = 3e_3 - 2e_1$ e al variare di $k \in \mathbb{R}$ la matrice $A(k) = \begin{pmatrix} -2k-9 & 3 & 3(k+4) \\ 0 & 0 & 0 \\ -2(k+3) & 2 & 3k+8 \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Esibire la matrice $B = (2v \wedge e_2, e_2 + v \wedge e_2, 3e_2 \wedge v)$

(B) (4 punti) Discutere la diagonalizzabilità di $A(k)$.

(C) (6 punti) Discutere la diagonalizzabilità di $B + k \cdot A(k)$.

Geom **2.** Considerare la curva $\alpha(t) = (1 - t^2, \cos(\pi t), \sin(\pi t))$ con $t \in [-1, 1]$.

(A) (2 punti) Provare che α è una curva semplice e chiusa e stabilire se la sua immagine in $\mathbb{R}^3$ ammetta in ogni punto una retta tangente.

(B) (3 punti) Calcolare $\int_\alpha \sqrt{|1-x|}$.

(C) (3 punti) Determinare curvatura e torsione di α in $t = \frac{1}{2}$.

(D) (2 punti) Detta β la proiezione di α sul piano xy calcolare $\int_\beta \left(e^{\sin(x^7 - y^9)}\, \mathrm{d}x - \log\left(1 + \frac{1}{3 - \cos^3(xy)}\right) \mathrm{d}y \right)$.

(E) (2 punti) Detta γ la proiezione di α sul piano xz calcolare $\int \frac{x\,\mathrm{d}z - z\,\mathrm{d}x}{x^2 + z^2}$.

GAII **3.** Considerare il sottospazio $X = \{x \in \mathbb{R}^4 : 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 0\}$ e la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Determinare tutti i vettori di X con due coordinate nulle e le altre due intere, prime fra loro, e con la prima positiva.

(B) (3 punti) Verificare che i vettori trovati nel punto precedente generano X, disporli in ordine crescente di somma dei quadrati delle coordinate, ed estrarne una base $\mathcal{B}$ di X, verificando che i vettori scartati costituiscono un'altra base $\mathcal{C}$ di X.

(C) (2 punti) Verificare che ponendo $f(x) = A \cdot x$ resta definita un'applicazione lineare $f : X \to X$.

(D) (3 punti) Determinare $M = [f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$.

(E) (2 punti) Calcolare il coefficiente di posto $(2, 3)$ di M^{-1}.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Geometria — Scritto del 11/6/10 — Quesiti

Risposte esatte

5. ♡

1. $k = -1$

2. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

3. $k = 4$

4. $\pm\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 2i \\ i-3 \end{pmatrix}$

5. Paraboloide iperbolico

6. $\{[9 : 4 : 6],\ [16 : 1 : -4]\}$

7. 28

8. $z = \frac{i}{3},\ z = 1 - 2i$

9. $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2i \\ 1+i \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i-1 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢