



Geometria — Scritto del 11/6/10 — Quesiti

Nome _____ Cognome _____ Matricola _____

1. Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} 21k^2 + 12k - 8 & -28k^2 - 16k + 12 \\ 15k^2 + 9k - 6 & -20k^2 - 12k + 9 \end{pmatrix}$ non è diagonalizzabile.

2. Posto $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 2x_1 + 3x_2\}$ esibire una base che diagonalizza $f : X \rightarrow X$ lineare tale che $f(e_1 + 2e_3) = 4e_1 - 3e_2 - e_3$ e $f(e_2 + 3e_3) = 6e_1 - 5e_2 - 3e_3$.

3. Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} \sqrt{\pi} & 1 - 3k \\ 3 - k & k^8 \end{pmatrix}$ ammette una base ortonormale di autovettori.

4. Determinare un vettore di \mathbb{C}^2 unitario, ortogonale a $(1+i)e_1 + (1-2i)e_2$ e avente seconda coordinata immaginaria pura.

5. Determinare il tipo affine della quadrica di equazione $5x^2 + 10y^2 + z^2 - 2xy - 2xz + 6yz - 3x - 2y + z + 1 = 0$.

Geom 6. Determinare l'intersezione tra $\{[t + 1 : 9 - t : 2t - 1] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : t \in \mathbb{R}\}$ e l'insieme dei punti all'infinito della quadrica di equazione $x^2 - yz + 7x - 4z + 1 = 0$.

Geom 7. Posto $R = [-1, 1] \times [0, 2]$ e $\omega = (5y^2 + e^{\cos^3 x}) dx + (\sin y^2 + x^3 y) dy$ calcolare $\int_{\partial R} \omega$.

GAII 8. Sapendo che $z = -\frac{i}{2}$ è una soluzione di $6z^3 + (13i - 6)z^2 - (1 + i)z + 2i - 1 = 0$ trovare le altre.

GAII 9. Determinare la base \mathcal{B} di \mathbb{C}^2 tale che $[z]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} (1+i)z_1 + 2z_2 \\ -iz_1 + (1-i)z_2 \end{pmatrix}$ per ogni $z \in \mathbb{C}^2$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ◇ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ◇



1. Considerare il vettore $v = 3e_3 - 2e_1$ e al variare di $k \in \mathbb{R}$ la matrice $A(k) = \begin{pmatrix} -2k - 9 & 3 & 3(k + 4) \\ 0 & 0 & 0 \\ -2(k + 3) & 2 & 3k + 8 \end{pmatrix}$.

- (A) (2 punti) Esibire la matrice $B = (2v \wedge e_2, e_2 + v \wedge e_2, 3e_2 \wedge v)$
 (B) (4 punti) Discutere la diagonalizzabilità di $A(k)$.
 (C) (6 punti) Discutere la diagonalizzabilità di $B + k \cdot A(k)$.

Geom 2. Considerare la curva $\alpha(t) = (1 - t^2, \cos(\pi t), \sin(\pi t))$ con $t \in [-1, 1]$.

- (A) (2 punti) Provare che α è una curva semplice e chiusa e stabilire se la sua immagine in \mathbb{R}^3 ammetta in ogni punto una retta tangente.
 (B) (3 punti) Calcolare $\int_{\alpha} \sqrt{|1 - x|}$.
 (C) (3 punti) Determinare curvatura e torsione di α in $t = \frac{1}{2}$.
 (D) (2 punti) Detta β la proiezione di α sul piano xy calcolare $\int_{\beta} \left(e^{\sin(x^7 - y^9)} dx - \log \left(1 + \frac{1}{3 - \cos^3(xy)} \right) dy \right)$.
 (E) (2 punti) Detta γ la proiezione di α sul piano xz calcolare $\int \frac{x dz - z dx}{x^2 + z^2}$.

GAII 3. Considerare il sottospazio $X = \{x \in \mathbb{R}^4 : 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 0\}$ e la matrice $A =$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (A) (2 punti) Determinare tutti i vettori di X con due coordinate nulle e le altre due intere, prime fra loro, e con la prima positiva.
 (B) (3 punti) Verificare che i vettori trovati nel punto precedente generano X , disporli in ordine crescente di somma dei quadrati delle coordinate, ed estrarne una base \mathcal{B} di X , verificando che i vettori scartati costituiscono un'altra base \mathcal{C} di X .
 (C) (2 punti) Verificare che ponendo $f(x) = A \cdot x$ resta definita un'applicazione lineare $f : X \rightarrow X$.
 (D) (3 punti) Determinare $M = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$.
 (E) (2 punti) Calcolare il coefficiente di posto $(2, 3)$ di M^{-1} .



Risposte esatte

5. \diamond

1. $k = 1$

2. $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. $k = -1$

4. $\pm \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 3+i \\ 2i \end{pmatrix}$

5. Paraboloido ellittico

6. $\{[6 : 4 : 9], [5 : 25 : 1]\}$

7. -36

8. $z = \frac{i}{3}, z = 1 - 2i$

9. $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2i \\ 1+i \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i-1 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. \spadesuit 2. \heartsuit 3. \spadesuit 4. \clubsuit 5. \diamond 6. \spadesuit 7. \clubsuit 8. \heartsuit 9. \clubsuit 10. \diamond
