



Geometria — Scritto del 11/6/10 — Quesiti

Nome _____ Cognome _____ Matricola _____

1. Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} 15k^2 - 21k + 7 & 35k^2 - 49k + 14 \\ -6k^2 + 9k - 3 & -14k^2 + 21k - 6 \end{pmatrix}$ non è diagonalizzabile.
2. Posto $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 2x_2 + 3x_3\}$ esibire una base che diagonalizza $f : X \rightarrow X$ lineare tale che $f(2e_1 + e_2) = e_1 - 4e_2 + 3e_3$ e $f(3e_1 + e_3) = 3e_1 - 6e_2 + 5e_3$.
3. Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} k^5 & 2 - k \\ k - 6 & e^{-\pi} \end{pmatrix}$ ammette una base ortonormale di autovettori.
4. Determinare un vettore di \mathbb{C}^2 unitario, ortogonale a $(1 + 2i)e_1 + (1 - i)e_2$ e avente prima coordinata immaginaria pura.
5. Determinare il tipo affine della quadrica di equazione $3x^2 - 9y^2 + 6xy + 6xz - 6yz - 3x + y - 2z + 1 = 0$.
- Geom 6.** Determinare l'intersezione tra $\{[t + 5 : t : 2t - 2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : t \in \mathbb{R}\}$ e l'insieme dei punti all'infinito della quadrica di equazione $xy - z^2 - 5y + 8z + 1 = 0$.
- Geom 7.** Posto $R = [0, 2] \times [-1, 1]$ e $\omega = (e^{\cos^3 x} - 3xy^3) dx + (\sin y^2 + 2x^2) dy$ calcolare $\int_{\partial R} \omega$.
- GAII 8.** Sapendo che $z = -\frac{i}{2}$ è una soluzione di $6z^3 + (13i - 6)z^2 - (1 + i)z + 2i - 1 = 0$ trovare le altre.
- GAII 9.** Determinare la base \mathcal{B} di \mathbb{C}^2 tale che $[z]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} (1 + i)z_1 + 2z_2 \\ -iz_1 + (1 - i)z_2 \end{pmatrix}$ per ogni $z \in \mathbb{C}^2$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ◇



1. Considerare il vettore $v = 3e_3 - 2e_1$ e al variare di $k \in \mathbb{R}$ la matrice $A(k) = \begin{pmatrix} -2k-9 & 3 & 3(k+4) \\ 0 & 0 & 0 \\ -2(k+3) & 2 & 3k+8 \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Esibire la matrice $B = (2v \wedge e_2, e_2 + v \wedge e_2, 3e_2 \wedge v)$

(B) (4 punti) Discutere la diagonalizzabilità di $A(k)$.

(C) (6 punti) Discutere la diagonalizzabilità di $B + k \cdot A(k)$.

Geom 2. Considerare la curva $\alpha(t) = (1 - t^2, \cos(\pi t), \sin(\pi t))$ con $t \in [-1, 1]$.

(A) (2 punti) Provare che α è una curva semplice e chiusa e stabilire se la sua immagine in \mathbb{R}^3 ammetta in ogni punto una retta tangente.

(B) (3 punti) Calcolare $\int_{\alpha} \sqrt{|1-x|}$.

(C) (3 punti) Determinare curvatura e torsione di α in $t = \frac{1}{2}$.

(D) (2 punti) Detta β la proiezione di α sul piano xy calcolare $\int_{\beta} \left(e^{\sin(x^7-y^9)} dx - \log \left(1 + \frac{1}{3-\cos^3(xy)} \right) dy \right)$.

(E) (2 punti) Detta γ la proiezione di α sul piano xz calcolare $\int \frac{x dz - z dx}{x^2 + z^2}$.

GAII 3. Considerare il sottospazio $X = \{x \in \mathbb{R}^4 : 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 0\}$ e la matrice $A =$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(A) (2 punti) Determinare tutti i vettori di X con due coordinate nulle e le altre due intere, prime fra loro, e con la prima positiva.

(B) (3 punti) Verificare che i vettori trovati nel punto precedente generano X , disporli in ordine crescente di somma dei quadrati delle coordinate, ed estrarne una base \mathcal{B} di X , verificando che i vettori scartati costituiscono un'altra base \mathcal{C} di X .

(C) (2 punti) Verificare che ponendo $f(x) = A \cdot x$ resta definita un'applicazione lineare $f : X \rightarrow X$.

(D) (3 punti) Determinare $M = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$.

(E) (2 punti) Calcolare il coefficiente di posto $(2, 3)$ di M^{-1} .



Risposte esatte

5. ♥

1. $k = -1$

2. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

3. $k = 4$

4. $\pm \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 2i \\ i - 3 \end{pmatrix}$

5. Paraboloide iperbolico

6. $\{[9 : 4 : 6], [16 : 1 : -4]\}$

7. 28

8. $z = \frac{i}{3}, z = 1 - 2i$

9. $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2i \\ 1+i \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i-1 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ♦