UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Geometria — Scritto del 2/7/10 — Quesiti

Nome ______________ **Cognome** ______________ **Matricola** ⎵⎵⎵⎵⎵⎵

1. Esibire una base di $\mathbb{R}^2$ che diagonalizza $\begin{pmatrix} 23 & -84 \\ 6 & -22 \end{pmatrix}$.

2. Esibire un vettore di $\mathbb{C}^2$ unitario, ortogonale a $\begin{pmatrix} 2-i \\ 1+i \end{pmatrix}$ e con prima componente reale negativa.

3. Determinare i punti all'infinito in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ dell'insieme $\{(\sin t, 2t, 1-t) :\ t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$.

4. Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ la conica di equazione $x^2 + 4xy + ky^2 - 2x + 2y + 2 = 0$ è un'ellisse.

5. Determinare il tipo affine della quadrica di equazione $3y^2 + 10z^2 + 2xy + 6xz - 4yz - 2x + 2y = 0$.

Geom **6.** Stabilire se $f(x,y) = (1-y)^3(1+x)^2 - 3\cos(x+y) - 2x + 3y$
abbia un massimo o un minimo locale nel punto $(0,0)$.

Geom **7.** Posto $\omega = (y^3 + \cos x)\,\mathrm{d}x + (e^y - kxy^2)\,\mathrm{d}y$
stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ si ha $\int_\alpha \omega = 0$ per ogni curva chiusa α in $\mathbb{R}^2$.

GAII **8.** Se $f : \mathbb{C}^{10} \to \mathbb{C}^4$ è lineare, non nulla e non surgettiva, ed è data una base di $\mathrm{Ker}(f)$, quanti vettori bisogna aggiungere per ottenere una base di $\mathbb{C}^{10}$?

GAII **9.** Calcolare $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria — Scritto del 2/7/10 — Esercizî

1. In $\mathbb{R}^3$ considerare i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Ortonormalizzare (v_1, v_2) a una base (w_1, w_2) di $V = \mathrm{Span}(v_1, v_2)$.

(B) (2 punti) Determinare la matrice A che rappresenta la proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^3$ su V, verificando che $A \cdot A = {}^{\mathrm{t}}A = A$.

(C) (2 punti) Completare (w_1, w_2) a una base ortonormale $M = (w_1, w_2, w_3)$ di $\mathbb{R}^3$ con $\det(M) < 0$.

(D) (2 punti) Calcolare M^{-1}.

(E) (2 punti) Provare che M non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

(F) (2 punti) Verificare che $M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{\pi} & 0 & 0 \\ 0 & -17 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 \end{pmatrix} \cdot M$ è simmetrica e calcolarne traccia e determinante.

Geom **2.** Considerare la curva $\alpha(t) = (t^3, 1 - 2t^2, 3t - t^3)$ con $t \in \mathbb{R}$.

(A) (1 punto) Provare che α è semplice.

(B) (3 punti) Detta β la restrizione di α a $[0, 1]$ calcolare $\int_\beta (z - 53x)$.

(C) (3 punti) Detta γ la restrizione di α a $[-1, 1]$ calcolare $\int_\gamma (y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z)$.

(D) (2 punti) Sapendo che $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è tale che $\delta(s) = \alpha(\sigma(s))$ è in parametro d'arco e $\sigma(0) = 1$, calcolare $\sigma'(0)$.

(E) (3 punti) Calcolare curvatura e torsione di α nel punto $t = 1$.

GAII **3.** Considerare $X = \{x \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 + 5x_3 = 4x_2 + 3x_4\}$.

(A) (1 punto) Verificare che $\mathcal{B} = (2e_1 + e_2, 5e_2 + 4e_3, -e_1 + e_3 + e_4)$ è una base di X.

(B) (3 punti) Provare che ponendo $f(2e_1 + e_2) = -e_1 + e_3 + e_4$, $f(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) = 5e_2 + 4e_3$ e $f(5e_2 + 4e_3) = 2e_1 + e_2$ resta definita un'unica applicazione lineare $f : X \to X$.

(C) (2 punti) Provare che l'applicazione f è invertibile.

(D) (4 punti) Determinare la matrice $A = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

(E) (2 punti) Calcolare A^{-1}.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Geometria — Scritto del 2/7/10 — Quesiti

Risposte esatte

5. ♡

1. $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. $\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1+3i \end{pmatrix}$

3. $[0 : 2 : -1]$

4. $4 < k < 13$

5. Iperboloide a due falde

6. Un minimo locale: il gradiente si annulla e gli autovalori dell'hessiana sono positivi

7. $k = -3$

8. Tra 7 e 9

9. -4

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢