



Geometria — Scritto del 2/7/10 — Quesiti

Nome _____ Cognome _____ Matricola _____

1. Esibire una base di $\mathbb{R}^2$ che diagonalizza $\begin{pmatrix} 26 & -36 \\ 18 & -25 \end{pmatrix}$.
2. Esibire un vettore di $\mathbb{C}^2$ unitario, ortogonale a $\begin{pmatrix} 2-i \\ 1+i \end{pmatrix}$ e con seconda componente reale negativa.
3. Determinare i punti all'infinito in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ dell'insieme $\{(t, \cos t, 1 - 2t) : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$.
4. Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ la conica di equazione $x^2 + 2xy + ky^2 - 4x + 2y + 5 = 0$ è un'ellisse.
5. Determinare il tipo affine della quadrica di equazione $5y^2 - 8z^2 - 2xy - 6xz - 4yz + 2x - 2y = 0$.

Geom 6. Stabilire se $f(x, y) = (1 - y)^3(1 + x)^2 - \cos(x + y) - 2x + 3y$ abbia un massimo o un minimo locale nel punto $(0, 0)$.

Geom 7. Posto $\omega = (kx^2y + e^x) dx + (x^3 + \sin y) dy$ stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ si ha $\int_{\alpha} \omega = 0$ per ogni curva chiusa α in $\mathbb{R}^2$.

GAII 8. Se $f : \mathbb{C}^5 \rightarrow \mathbb{C}^{11}$ è lineare, non nulla e non iniettiva, ed è data una base di $\text{Im}(f)$, quanti vettori bisogna aggiungere per ottenere una base di $\mathbb{C}^{11}$?

GAII 9. Calcolare $\det \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ◇



1. In $\mathbb{R}^3$ considerare i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.
- (A) (2 punti) Ortonormalizzare (v_1, v_2) a una base (w_1, w_2) di $V = \text{Span}(v_1, v_2)$.
- (B) (2 punti) Determinare la matrice A che rappresenta la proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^3$ su V , verificando che $A \cdot A = {}^t A = A$.
- (C) (2 punti) Completare (w_1, w_2) a una base ortonormale $M = (w_1, w_2, w_3)$ di $\mathbb{R}^3$ con $\det(M) < 0$.
- (D) (2 punti) Calcolare M^{-1} .
- (E) (2 punti) Provare che M non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.
- (F) (2 punti) Verificare che $M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{\pi} & 0 & 0 \\ 0 & -17 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 \end{pmatrix} \cdot M$ è simmetrica e calcolarne traccia e determinante.

Geom 2. Considerare la curva $\alpha(t) = (t^3, 1 - 2t^2, 3t - t^3)$ con $t \in \mathbb{R}$.

- (A) (1 punto) Provare che α è semplice.
- (B) (3 punti) Detta β la restrizione di α a $[0, 1]$ calcolare $\int_{\beta} (z - 53x)$.
- (C) (3 punti) Detta γ la restrizione di α a $[-1, 1]$ calcolare $\int_{\gamma} (y \, dx + z \, dy + x \, dz)$.
- (D) (2 punti) Sapendo che $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è tale che $\delta(s) = \alpha(\sigma(s))$ è in parametro d'arco e $\sigma(0) = 1$, calcolare $\sigma'(0)$.
- (E) (3 punti) Calcolare curvatura e torsione di α nel punto $t = 1$.

GAII 3. Considerare $X = \{x \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 + 5x_3 = 4x_2 + 3x_4\}$.

- (A) (1 punto) Verificare che $\mathcal{B} = (2e_1 + e_2, 5e_2 + 4e_3, -e_1 + e_3 + e_4)$ è una base di X .
- (B) (3 punti) Provare che ponendo $f(2e_1 + e_2) = -e_1 + e_3 + e_4$, $f(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) = 5e_2 + 4e_3$ e $f(5e_2 + 4e_3) = 2e_1 + e_2$ resta definita un'unica applicazione lineare $f : X \rightarrow X$.
- (C) (2 punti) Provare che l'applicazione f è invertibile.
- (D) (4 punti) Determinare la matrice $A = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.
- (E) (2 punti) Calcolare A^{-1} .

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.



Risposte esatte

5. ♥

1. $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

2. $\frac{1}{\sqrt{35}} \begin{pmatrix} 1-3i \\ -5 \end{pmatrix}$

3. $[1 : 0 : -2]$

4. $1 < k < 10$

5. Iperboloide a una falda

6. Nessuno dei due, il gradiente si annulla ma gli autovalori dell'hessiana sono discordi

7. $k = 3$

8. Tra 6 e 10

9. 4

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ◇
