UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Geometria — Scritto del 1/2/10 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Posto $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 = x_2 + x_3\}$ e considerare $f : X \to X$ data da $f(x) = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_3 \\ x_1 + x_3 - 2x_2 \\ 2x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}$ e calcolare il polinomio caratteristico di f.

2. Per quali k la matrice $\begin{pmatrix} -k^2 + 2k + 12 & k^2 - k - 6 \\ -2k^2 + 4k + 16 & 2k^2 - 2k - 8 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile?

3. Per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 - k^2 & 3k + 7 \\ 1 + k & k^2 \end{pmatrix}$ ammette una base ortonormale di autovettori?

4. Trovare tutti i vettori di $\mathbb{C}^2$ unitarî, ortogonali a $\begin{pmatrix} 1 + i \\ 1 - 2i \end{pmatrix}$ e con prima componente immaginaria pura.

5. Determinare il tipo affine della quadrica di equazione $4x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 4xy + 4xz - 6yz + x - 3y = 0$.

Geom **6.** In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ determinare l'intersezione tra l'insieme $\{[2s : 3 - s^2 : 1] : \ s \in \mathbb{R}\}$ e l'insieme dei punti all'infinito della quadrica di equazione $z = x^2 - y^2$.

Geom **7.** Per quale k è chiusa la forma $y^2(xy\cos(xy) + k\sin(xy))\,\mathrm{d}x + xy(xy\cos(xy) + 2\sin(xy))\,\mathrm{d}y$?

GAII **8.** Sapendo che $z = -\frac{i}{2}$ è una soluzione dell'equazione $2iz^3 + (2i - 1)z^2 - (7 + 2i)z + 1 - 3i = 0$, trovare le altre.

GAII **9.** Determinare le coordinate di $e_1 - e_2 + 2e_3$ rispetto alla base $\mathcal{B} = (2e_1 - 3e_2, \ -e_1 + e_2 - e_3, \ 3e_1 + 8e_3)$ di $\mathbb{R}^3$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

1. In $\mathbb{R}^3$ considerare i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} -11 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$.

(A) (3 punti) Provare che v_1 e v_2 sono ortogonali tra loro e completare (v_1, v_2) a una base ortogonale (v_1, v_2, v_3) di $\mathbb{R}^3$ con v_3 avente prima coordinata positiva e norma $\sqrt{6}$.

(B) (3 punti) Posto $W = \text{Span}(v_1, v_2)$ determinare la matrice che rappresenta la proiezione ortogonale su W.

(C) (2 punti) Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare l'applicazione lineare $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(v_1) = k^2 v_1 + (k+2)v_2 + 2v_3,\ f(v_2) = (2-k)v_2 + kv_3,\ f(v_3) = v_3$ e calcolare il determinante di f_k.

(D) (4 punti) Determinare per quali k l'applicazione f_k del punto precedente è diagonalizzabile.

Geom **2.** Considerare $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = (t\cos(t), t^2 \sin(t))$.

(A) (3 punti) Provare che α è una curva liscia.

(B) (3 punti) Determinare il segno della curvatura di α nel punto corrispondente a $t = \frac{\pi}{4}$.

(C) (3 punti) Calcolare la curvatura di α nel punto corrispondente a $t = \pi$.

(D) (3 punti) Detta β la restrizione di α all'intervallo $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi\right]$, calcolare $\int_\beta x^3 y(2y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y)$.

./.

GAII **3.** Considerare la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $X = \{x \in \mathbb{R}^4 : \ x_1 + x_2 = x_3 + x_4\}$.

(A) (3 punti) Calcolare il prodotto degli autovalori di A.

(B) (1 punto) Provare che $\mathcal{B} = (2e_1 + e_3 + e_4, e_2 + e_4, e_1 + e_2 + 2e_3)$ è una base di X.

(C) (3 punti) Provare che ponendo $f(x) = A \cdot x$ resta definita un'applicazione lineare $f : X \to X$.

(D) (3 punti) Determinare $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

(E) (2 punti) Calcolare il coefficiente di posto $(3, 2)$ nell'inversa della matrice del punto precedente.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Geometria — Scritto del 1/2/10 — Quesiti

Risposte esatte

5. ♡

1. $p_f(t) = t^2 + 4t - 1$

2. $k \neq 2$

3. $k = -3$

4. $\pm\frac{1}{\sqrt{35}}\begin{pmatrix} 5i \\ i-3 \end{pmatrix}$ con $\vartheta \in \mathbb{R}$

5. Paraboloide ellittico

6. $\{[2:2:1],\ [-2:2:1],\ [6:-6:1],\ [-6:-6:1]\}$

7. $k = 1$

8. $i-2,\ 1-i$

9. $-\begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢