UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Geometria — Scritto del 1/2/10 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Posto $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 + x_2 = x_3\}$ considerare $f : X \to X$ data da $f(x) = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 \\ x_3 - 2x_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$ e calcolare il polinomio caratteristico di f.

2. Per quali k la matrice $\begin{pmatrix} 2k^2 + 2k + 1 & k^2 + 2k + 1 \\ -2k^2 - 3k - 1 & -k^2 - 3k - 1 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile?

3. Per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} k^2 & 3k - 7 \\ k + 1 & 1 - k^2 \end{pmatrix}$ ammette una base ortonormale di autovettori?

4. Trovare tutti i vettori di $\mathbb{C}^2$ unitarî, ortogonali a $\begin{pmatrix} 1 + 2i \\ 1 - i \end{pmatrix}$ e con seconda componente immaginaria pura.

5. Determinare il tipo affine della quadrica di equazione $3x^2 - 8y^2 + z^2 + 2xy + 4xz - 2yz - y + 2z = 0$.

Geom **6.** In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ determinare l'intersezione tra l'insieme $\{[s : 2 - s^2 : 1] : \ s \in \mathbb{R}\}$ e l'insieme dei punti all'infinito della quadrica di equazione $z = x^2 - y^2$.

Geom **7.** Per quale k è chiusa la forma $xy(k\cos(xy) - xy\sin(xy))\,\mathrm{d}x + x^2(\cos(xy) - xy\sin(xy))\,\mathrm{d}y$?

GAII **8.** Sapendo che $z = \frac{i}{2}$ è una soluzione dell'equazione $2iz^3 + (1 - 2i)z^2 - (7 + 2i)z + 3i - 1 = 0$, trovare le altre.

GAII **9.** Determinare le coordinate di $e_1 - e_2 + 2e_3$ rispetto alla base $\mathcal{B} = (2e_1 - 3e_2,\ -e_1 + e_2 - e_3,\ 4e_2 + 7e_3)$ di $\mathbb{R}^3$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria — Scritto del 1/2/10 — Esercizî

1. In $\mathbb{R}^3$ considerare i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} -11 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$.

(A) (3 punti) Provare che v_1 e v_2 sono ortogonali tra loro e completare (v_1, v_2) a una base ortogonale (v_1, v_2, v_3) di $\mathbb{R}^3$ con v_3 avente prima coordinata positiva e norma $\sqrt{6}$.

(B) (3 punti) Posto $W = \mathrm{Span}(v_1, v_2)$ determinare la matrice che rappresenta la proiezione ortogonale su W.

(C) (2 punti) Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare l'applicazione lineare $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(v_1) = k^2 v_1 + (k+2)v_2 + 2v_3$, $f(v_2) = (2-k)v_2 + kv_3$, $f(v_3) = v_3$ e calcolare il determinante di f_k.

(D) (4 punti) Determinare per quali k l'applicazione f_k del punto precedente è diagonalizzabile.

Geom **2.** Considerare $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = (t\cos(t), t^2 \sin(t))$.

(A) (3 punti) Provare che α è una curva liscia.

(B) (3 punti) Determinare il segno della curvatura di α nel punto corrispondente a $t = \frac{\pi}{4}$.

(C) (3 punti) Calcolare la curvatura di α nel punto corrispondente a $t = \pi$.

(D) (3 punti) Detta β la restrizione di α all'intervallo $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi\right]$, calcolare $\int_\beta x^3 y(2y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y)$.

./.

GAII **3.** Considerare la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $X = \{x \in \mathbb{R}^4 : \ x_1 + x_2 = x_3 + x_4\}$.

(A) (3 punti) Calcolare il prodotto degli autovalori di A.

(B) (1 punto) Provare che $\mathcal{B} = (2e_1 + e_3 + e_4, e_2 + e_4, e_1 + e_2 + 2e_3)$ è una base di X.

(C) (3 punti) Provare che ponendo $f(x) = A \cdot x$ resta definita un'applicazione lineare $f : X \to X$.

(D) (3 punti) Determinare $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$.

(E) (2 punti) Calcolare il coefficiente di posto $(3, 2)$ nell'inversa della matrice del punto precedente.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Geometria — Scritto del 1/2/10 — Quesiti

Risposte esatte

5. $\diamondsuit$

1. $p_f(t) = (t-2)^2$

2. $k \neq 0$

3. $k = 4$

4. $\pm \frac{1}{\sqrt{35}} \begin{pmatrix} 3+i \\ 5i \end{pmatrix}$ con $\vartheta \in \mathbb{R}$

5. Paraboloide iperbolico

6. $\{[1:1:1],\ [-1:1:1],\ [2:-2:1],\ [-2:-2:1]\}$

7. $k = 2$

8. $i-1,\ 2-i$

9. $-\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$