UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Geometria — Scritto del 23/7/10 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$. Trovare $v_3 \in \mathbb{R}^3$ unitario, ortogonale a v_1 e v_2, con $\det(v_1\ v_2\ v_3) < 0$.

2. Per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} 2+k^3 & 1-3k \\ 2+k & 19 \end{pmatrix}$ ammette una base ortonormale di autovettori?

3. Determinare una matrice coniugata a $\begin{pmatrix} 0 & -1 & \sqrt{7} \\ 1 & 0 & -1 \\ -\sqrt{7} & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e avente due soli coefficienti non nulli.

4. Determinare $\{[1+t : -t : 1] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) :\ t \in \mathbb{R}\} \cap \{[s-3 : 1-s : s+1] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) :\ s \in \mathbb{R}\}$.

5. Determinare il tipo affine della quadrica di equazione $5x^2+2y^2+5z^2-4xy-4xz-2yz+4x-2z+3=0$.

Geom **6.** Determinare l'intersezione tra $\{[3t-4 : t : t-2] \in \mathbb{P}^(\mathbb{R}) :\ t \in \mathbb{R}\}$ e l'insieme dei punti all'infinito della quadrica di equazione $y^2 - xz + 9y - 3z + 5 = 0$.

Geom **7.** Posto $\omega = -\sin(xy)(y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y)$ e $\alpha(t) = (\pi \log_2(1+t), -\cos(\pi t^2))$ con $t \in [0,1]$, calcolare $\int_\alpha \omega$.

GAII **8.** Data $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con $f(x) = \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ -5x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$ e posto $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ determinare $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$.

GAII **9.** Data $A = (v_1,\ v_2,\ v_3) \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ tale che $\det(A) = 1+i$, calcolare $\det(iv_3 - v_1,\ 2v_3 + iv_2,\ iv_1 - 2v_3)$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Geometria — Scritto del 23/7/10 — Esercizî

1. Dati in $\mathbb{R}^3$ due piani V e W passanti per l'origine, indicare con f e g le proiezioni ortogonali di $\mathbb{R}^3$ su V e su W rispettivamente.

(A) (3 punti) Stabilire per quale posizioni reciproche di V e W vale $f \circ g = g \circ f$.

(B) (3 punti) Provare che $f + g$ ha sempre l'autovalore 2.

Considerare ora il caso particolare $V = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}\right)$ e $W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

(C) (3 punti) Determinare le matrici A e B che rappresentano f e g.

(D) (3 punti) Determinare gli autovalori di $A + B$ e una base ortogonale che la diagonalizza.

Geom **2.** Considerare la curva $\alpha(t) = (e^t, te^t)$ con $t \in [0, 1]$.

(A) (1 punti) Provare che è semplice e regolare.

(B) (3 punti) Calcolare $\int_\alpha \frac{x+y}{x^2}$.

(C) (3 punti) Calcolare $\int_\alpha x^2 \, \mathrm{d}y$

(D) (3 punti) Calcolare la curvatura di α in ogni suo punto.

(E) (2 punti) Esibire una curva β semplice e regolare avente gli stessi estremi di α e curvatura sempre negativa.

GAII **3.** In $\mathbb{C}^2$ considerare i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ -2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 2+i \end{pmatrix}$, $w_1 = \begin{pmatrix} 2-i \\ 3i \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1+2i \end{pmatrix}$ e porre $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ e $\mathcal{C} = (w_1, w_2)$.

(A) (3 punti) Provare che $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ sono basi di $\mathbb{C}^2$.

(B) (3 punti) Provare che esiste una e una sola applicazione lineare $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ tale che $f(v_1) = w_1$ e $f(v_2) = w_2$.

(C) (3 punti) Determinare $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

(D) (3 punti) Calcolare il coefficiente di posto (1,2) dell'inversa della matrice trovata nel punto precedente.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte esatte

5. ♡

1. $-\frac{1}{3\sqrt{110}}\begin{pmatrix} 26 \\ 5 \\ 17 \end{pmatrix}$

2. $k = -\frac{1}{4}$

3. $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. $\{[3 : -2 : 1]\}$

5. Insieme vuoto

6. $\{[1 : -1 : 1],\ [4 : 2 : 1]\}$

7. -2

8. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -14 & 5 \end{pmatrix}$

9. $3i - 3$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢