



Geometria — Scritto del 23/7/10 — Quesiti

Nome _____ Cognome _____ Matricola _____

1. $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$. Trovare $v_3 \in \mathbb{R}^3$ unitario, ortogonale a v_1 e v_2 , con $\det(v_1 \ v_2 \ v_3) < 0$.

2. Per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} 17 & 3-2k \\ 1+k & 1-k^3 \end{pmatrix}$ ammette una base ortonormale di autovettori?

3. Determinare una matrice coniugata a $\begin{pmatrix} 0 & -1 & \sqrt{6} \\ 1 & 0 & 3 \\ -\sqrt{6} & -3 & 0 \end{pmatrix}$ e avente due soli coefficienti non nulli.

4. Determinare $\{[1+t : 1 : -t] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : t \in \mathbb{R}\} \cap \{[s-3 : s+1 : 1-s] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : s \in \mathbb{R}\}$.

5. Determinare il tipo affine della quadrica di equazione $2x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 4xy - 2xz - 4yz - 4y + 2z + 1 = 0$.

Geom 6. Determinare l'intersezione tra $\{[t-2 : 3t-4 : t] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : t \in \mathbb{R}\}$ e l'insieme dei punti all'infinito della quadrica di equazione $z^2 - xy + 7x - 5z + 9 = 0$.

Geom 7. Posto $\omega = \sin(xy)(y \, dx + x \, dy)$ e $\alpha(t) = (\pi \log_2(1+t), -\cos(\pi t^2))$ con $t \in [0, 1]$, calcolare $\int_{\alpha} \omega$.

GAII 8. Data $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $f(x) = \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ -5x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$ e posto $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ determinare $[f]_{\mathcal{B}}$.

GAII 9. Data $A = (v_1, v_2, v_3) \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{C})$ tale che $\det(A) = 1-i$, calcolare $\det(iv_3 - v_2, 2v_1 + iv_2, iv_1 - 2v_3)$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ◇



1. Dati in \mathbb{R}^3 due piani V e W passanti per l'origine, indicare con f e g le proiezioni ortogonali di \mathbb{R}^3 su V e su W rispettivamente.

(A) (3 punti) Stabilire per quale posizioni reciproche di V e W vale $f \circ g = g \circ f$.

(B) (3 punti) Provare che $f + g$ ha sempre l'autovalore 2.

Considerare ora il caso particolare $V = \text{Span} \left(\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \right) \right)$ e $W = \text{Span} \left(\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right)$.

(C) (3 punti) Determinare le matrici A e B che rappresentano f e g .

(D) (3 punti) Determinare gli autovalori di $A + B$ e una base ortogonale che la diagonalizza.

Geom 2. Considerare la curva $\alpha(t) = (e^t, te^t)$ con $t \in [0, 1]$.

(A) (1 punto) Provare che è semplice e regolare.

(B) (3 punti) Calcolare $\int_{\alpha} \frac{x+y}{x^2}$.

(C) (3 punti) Calcolare $\int_{\alpha} x^2 dy$.

(D) (3 punti) Calcolare la curvatura di α in ogni suo punto.

(E) (2 punti) Esibire una curva β semplice e regolare avente gli stessi estremi di α e curvatura sempre negativa.

Geom 3. In \mathbb{C}^2 considerare i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ -2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 2+i \end{pmatrix}$, $w_1 = \begin{pmatrix} 2-i \\ 3i \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1+2i \end{pmatrix}$ e porre $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ e $\mathcal{C} = (w_1, w_2)$.

(A) (3 punti) Provare che \mathcal{B} e \mathcal{C} sono basi di \mathbb{C}^2 .

(B) (3 punti) Provare che esiste una e una sola applicazione lineare $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ tale che $f(v_1) = w_1$ e $f(v_2) = w_2$.

(C) (3 punti) Determinare $[f]_{\mathcal{B}}$.

(D) (3 punti) Calcolare il coefficiente di posto (1,2) dell'inversa della matrice trovata nel punto precedente.



Risposte esatte

5. ♥

1. $\frac{1}{3\sqrt{94}} \begin{pmatrix} 19 \\ -14 \\ -17 \end{pmatrix}$

2. $k = \frac{2}{3}$

3. $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. $\{[3 : 1 : -2]\}$

5. Ellissoide

6. $\{[1 : 1 : -1], [1 : 4 : 2]\}$

7. 2

8. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -14 & 5 \end{pmatrix}$

9. $5i - 3$