



1. Calcolare il coefficiente di posto $(2, 3)$ della matrice $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -3 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$.

2. Per quale base \mathcal{B} di \mathbb{R}^2 si ha $\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4x_1 + x_2 \\ 9x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$ per ogni $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$?

3. Per quali $k \in \mathbb{R}$ si ha $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ 2 & k & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = -6$?

4. Se $f : \{z \in \mathbb{C}^6 : z_1 + z_6 = 0\} \rightarrow \mathbb{C}^9$ è lineare, $f(e_2) = f(e_5)$, e $W + \text{Im}(f) = \mathbb{C}^9$, che dimensione può avere W ?

5. Risolvere $\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 13 \\ 9x + 2y - 3z = -9 \\ 4x + 5y + 3z = 1. \end{cases}$

6. Per quali $z \in \mathbb{C}$ i vettori $\begin{pmatrix} 1 - 2i \\ z + i \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 3 - i \\ 2 - 3i \end{pmatrix}$ sono linearmente dipendenti?

AL09 7. Sapendo che $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$ e che la proiezione su X è associata alla matrice $\begin{pmatrix} -7 & -2 & 5 \\ 8 & 3 & -5 \\ -8 & -2 & 6 \end{pmatrix}$, trovare una base di Z .

AL08 8. Per quali $k \in \mathbb{R}$ la differenza tra gli autovalori della matrice $\begin{pmatrix} k-1 & k-2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ vale 5?

GAI 9. Qual è la matrice associata all'equazione cartesiana della parabola avente come asse la bisettrice del secondo e del quarto quadrante e passante per i punti $(1, 0)$ e $(0, -2)$?

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ◇



1. Considerare

$$\begin{aligned} X &= \{x \in \mathbb{R}^4 : 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\} \\ \mathcal{B} &= \{3e_2 - e_1, 2e_2 + e_4 - e_1, 3e_3 - e_1, \} \\ \mathcal{C} &= \{e_2 + e_3 + e_4 - e_1, 3e_4 - e_1, 2e_4 + e_2 - e_1\} \\ A &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- (A) (3 punti) Verificare che \mathcal{B} e \mathcal{C} sono basi di X .
- (B) (3 punti) Esibire la matrice di cambio di base da \mathcal{B} a \mathcal{C} .
- (C) (3 punti) Provare che la formula $f(x) = A \cdot x$ definisce un'applicazione lineare $f : X \rightarrow X$.
- (D) (3 punti) Esibire $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$.

2. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare in \mathbb{R}^4 il sottospazio affine

$$E_k = \begin{pmatrix} k \\ 2 \\ 1 \\ 3k+1 \end{pmatrix} + \text{Span} \left(\begin{pmatrix} k+1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ k-1 \\ 1 \\ k+1 \end{pmatrix} \right).$$

(A) (3 punti) Determinare la dimensione di E_k al variare di k .

(B) (3 punti) Esibire equazioni cartesiane di E_k .

(C) (3 punti) Trovare l'unico valore k_0 per il quale E_{k_0} passa per 0.

AL09 (D) (3 punti) Posto $W = E_{k_0}$ e $Z = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_2 = x_3 = 0\}$ esibire la proiezione di \mathbb{R}^4 su Z associata alla decomposizione $\mathbb{R}^4 = W \oplus Z$.

AL08 (E) (3 punti) Provare che ponendo $f \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ e $f \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ resta definita un'unica applicazione lineare $f : E_{k_0} \rightarrow E_{k_0}$ e trovarne gli autovalori.

GAI (F) (3 punti) Posto $p \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ determinare l'angolo tra le immagini tramite p dei vettori assegnati come generatori della giacitura di E_k quando $k = 2$.



Risposte esatte

5. ♥

1. $\frac{11}{5}$

2. $\mathcal{B} = \left(\left(\begin{array}{c} -2 \\ 9 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 1 \\ -4 \end{array} \right) \right)$

3. $k = 1, k = 6$

4. Tra 5 e 9

5. $x = 1, y = -3, z = 4$

6. $z = -\frac{1}{2}(1 + 7i)$

7. $\left(\begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 1 \end{array} \right)$

8. $k = 3, k = -19$

9. $\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 2 \end{array} \right)$ o una sua multipla non nulla

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ♦