UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Algebra Lineare — Scritto del 23/7/10 — Quesiti

**Nome** ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

**1.** Stabilire se $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ è razionale.

**2.** Dato un sistema di 4 vettori linearmente indipendenti in $Y=\{y\in\mathbb{R}^8:\ y_2-7y_8=5y_3-4y_6=0\}$, quanti bisogna aggiungerne per ottenere una base di $Y$?

**3.** Se $f:\mathbb{R}^6\to\mathbb{R}^5$ ha immagine di dimensione 2 e $Z\cap\operatorname{Ker}(f)=\{0\}$, che dimensione ha $Z$?

**4.** Data $A=(v_1,\ v_2,\ v_3)\in\mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{C})$ tale che $\det(A)=1+i$, calcolare $\det(iv_3-v_1,\ 2v_3+iv_2,\ iv_1-2v_3)$.

**5.** Risolvere $\begin{cases} 2x-3y+4z=5\\ 3x+2y-5z=-7\\ 17x-6y+z=0. \end{cases}$

**6.** Calcolare i determinanti delle orlate di $\begin{pmatrix} -3 & 7\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 & 7\\ 5 & 1 & 2 & -1\\ 1 & -2 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

**7.** Posto $V=\operatorname{Span}(3e_1-2e_2)$ e $W=\operatorname{Span}(3e_2-4e_1)$, determinare l'espressione della proiezione su $V$ associata alla decomposizione $\mathbb{R}^2=V\oplus W$.

**Le risposte devono essere sinteticamente giustificate**

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

# Algebra Lineare — Scritto del 23/7/10 — Esercizî

**1.** In $\mathbb{R}^3$ considerare al variare di $k \in \mathbb{R}$ il sottospazio affine

$$E_k = \begin{pmatrix} 2 \\ -k \\ k+1 \end{pmatrix} + \operatorname{Span}\left( \begin{pmatrix} -k \\ k-1 \\ k+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k-2 \\ -3k \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

(A) (3 punti) Calcolare la dimensione di $E_k$ al variare di $k$.

(B) (3 punti) Esibire equazioni cartesiane di $E_k$ per $k = -3$.

(D) (3 punti) Stabilire per quali $k$ si ha che $E_k$ è parallelo al piano di equazione $8x + 2y + 5z = \sqrt{\pi}$.

(E) (3 punti) Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ si ha che $E_k$ contiene il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

**2.** Posto $X = \{x \in \mathbb{R}^4 : \ 2x_1 + 3x_2 = 4x_3 + x_4\}$ considerare al variare di $k \in \mathbb{R}$ le applicazioni lineari $f : X \to X$ tali che

$$f\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 5k+1 \\ 1-k \\ k+1 \\ 3k+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

(A) (3 punti) Discutere, giustificando la risposta, quante tali $f$ esistano al variare di $k$.

(B) (3 punti) Provare che per $k = 0$ i vettori su cui $f$ è assegnata costituiscono una base $\mathcal{B}$ di $X$ e determinare, sempre per $k = 0$, la matrice $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

(C) (3 punti) Dimostrare che, quando esiste, la $f$ è invertibile.

(D) (3 punti) Calcolare l'inversa della matrice trovata nel punto (B).

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

# Risposte esatte

5. ♡

**1.** No, altrimenti lo sarebbe il suo quadrato, e allora lo sarebbe $\sqrt{15}$, che non lo è

**2.** 2

**3.** Tra 0 e 2

**4.** $3i - 3$

**5.** Impossibile

**6.** $-61$ e 33

**7.** $p(x) = \begin{pmatrix} 9x_1 + 12x_2 \\ -6x_1 - 8x_2 \end{pmatrix}$

**8.**

**9.**

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢