



Algebra Lineare — Scritto del 23/7/10 — Quesiti

Nome _____ Cognome _____ Matricola _____

1. Stabilire se $\sqrt{7} - \sqrt{2}$ è razionale.
2. Dato un sistema di 13 generatori di $X = \{x \in \mathbb{R}^9 : x_1 + 5x_3 = 4x_6 - 7x_9 = 0\}$, quanti bisogna scartarne per ottenere una base di X ?
3. Se $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^7$ è lineare e ha nucleo di dimensione 2 e $W + \text{Im}(f) = \mathbb{R}^7$, che dimensione ha W ?
4. Data $A = (v_1, v_2, v_3) \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{C})$ tale che $\det(A) = 1 - i$, calcolare $\det(iv_3 - v_2, 2v_1 + iv_2, iv_1 - 2v_3)$.
5. Risolvere
$$\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 8 \\ 4x + 3y - 2z = 7 \\ 2x - 7y + 12z = 10. \end{cases}$$
6. Calcolare i determinanti delle orlate di $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
7. Posto $V = \text{Span}(3e_1 - 4e_2)$ e $W = \text{Span}(3e_2 - 2e_1)$, determinare l'espressione della proiezione su V associata alla decomposizione $\mathbb{R}^2 = V \oplus W$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

 1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ◇ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ◇



1. In \mathbb{R}^3 considerare al variare di $k \in \mathbb{R}$ il sottospazio affine

$$E_k = \begin{pmatrix} 2 \\ -k \\ k+1 \end{pmatrix} + \text{Span} \left(\begin{pmatrix} -k \\ k-1 \\ k+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k-2 \\ -3k \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

- (A) (3 punti) Calcolare la dimensione di E_k al variare di k .
- (B) (3 punti) Esibire equazioni cartesiane di E_k per $k = -3$.
- (D) (3 punti) Stabilire per quali k si ha che E_k è parallelo al piano di equazione $8x + 2y + 5z = \sqrt{\pi}$.
- (E) (3 punti) Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ si ha che E_k contiene il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

2. Posto $X = \{x \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 + 3x_2 = 4x_3 + x_4\}$ considerare al variare di $k \in \mathbb{R}$ le applicazioni lineari $f : X \rightarrow X$ tali che

$$f \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 5k+1 \\ 1-k \\ k+1 \\ 3k+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

- (A) (3 punti) Discutere, giustificando la risposta, quante tali f esistano al variare di k .
- (B) (3 punti) Provare che per $k = 0$ i vettori su cui f è assegnata costituiscono una base \mathcal{B} di X e determinare, sempre per $k = 0$, la matrice $[f]_{\mathcal{B}}$.
- (C) (3 punti) Dimostrare che, quando esiste, la f è invertibile.
- (D) (3 punti) Calcolare l'inversa della matrice trovata nel punto (B).



Risposte esatte

5. \diamond

1. No, altrimenti lo sarebbe il suo quadrato, e allora lo sarebbe $\sqrt{14}$, che non lo è
2. 6
3. Tra 5 e 7
4. $5i - 3$
5. Impossibile
6. -64 e 42
7. $p(x) = \begin{pmatrix} 9x_1 + 6x_2 \\ -12x_1 - 8x_2 \end{pmatrix}$
- 8.
- 9.

1. \spadesuit 2. \heartsuit 3. \spadesuit 4. \clubsuit 5. \diamond 6. \spadesuit 7. \clubsuit 8. \heartsuit 9. \clubsuit 10. \diamond
