UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Algebra Lineare — Scritto del 18/2/10 — Quesiti

Nome ______________ **Cognome** ______________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Se $V \oplus W = \{x \in \mathbb{R}^7 :\ x_1 = x_7\}$, $\dim(V) = 2$ e sono dati 13 generatori di W, quanti bisogna scartarne per avere una base?

2. Se $f : \{y \in \mathbb{R}^5 :\ 2y_1 + 3y_2 = 0\} \to \mathbb{R}^8$ e $f(e_3) = 4f(e_5)$, che dimensione può avere $\mathrm{Im}(f)$?

3. Determinare $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ dove $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x-y \\ y-2x \end{pmatrix}$ e $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$.

4. Data $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ determinare $(A^{-1})_{21}$.

5. Calcolare i determinanti delle orlate di $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Calcolare modulo e tangente dell'argomento di $\frac{3-2i}{4-3i}$.

AL09 **7.** Data la decomposizione $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \oplus \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ calcolare la proiezione di $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sul primo addendo.

AL08 **8.** Trovare una base che diagonalizza $\begin{pmatrix} 1 & 1+2i \\ i & -i \end{pmatrix}$.

GAI **9.** Per quali $k \in \mathbb{R}$ la conica di equazione $x^2 - 6kxy + 9y^2 - 2k^2x + 6y + 5 = 0$ è una parabola?

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Algebra Lineare — Scritto del 18/2/10 — Esercizî

1. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+ky-2z=2k-1 \\ x+2y-kz=k+1. \end{cases}$

(A) (4 punti) Stabilire quante soluzioni ammette al variare di k.

(B) (4 punti) Risolverlo per $k=-3$ e per $k=-1$ indicando con v_1 e v_2 i vettori così trovati.

Porre ora $V=\mathrm{Span}(v_1,v_2)$, $w=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $W=\mathrm{Span}(w)$.

AL09 (C) (4 punti) Verificare che $\mathbb{R}^3=V\oplus W$ e determinare la proiezione sul primo addendo di $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

AL08 (D) (4 punti) Provare che ponendo $f(v_1)=\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $f(v_2)=\begin{pmatrix} 0 \\ 19 \\ -20 \end{pmatrix}$ resta definita un'applicazione lineare $f:V\to V$ e determinare gli autovalori di f.

GAI (E) (4 punti) Calcolare $\langle v_1\wedge w|v_2\rangle$.

2. Per $k\in\mathbb{R}$ considerare in $\mathbb{R}^4$ il sottospazio E_k : $\begin{cases} x_1=t_1-2t_2+k-2 \\ x_2=-3t_1+(2+k^2)t_2+2 \\ x_3=kt_1-4t_2+k+2 \\ x_4=-t_1+kt_2. \end{cases}$

(A) (3 punti) Calcolare la dimensione di k al variare di k.

(B) (3 punti) Stabilire per quali k si ha che E_k passa per l'origine.

(C) (3 punti) Per ognuno dei k trovati al punto precedente trovare una base di E_k nella quale ogni vettore ha almeno una coordinata 0 e una coordinata 1.

(D) (3 punti) Esibire equazioni cartesiane di E_k per $k=1$.

UNIVERSITÀ DI PISA

IN SUPREMÆ DIGNITATIS 1343

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Algebra Lineare — Scritto del 18/2/10 — Quesiti

Risposte esatte

5. ♢

1. 9

2. Tra 0 e 3

3. $\begin{pmatrix} 11 & 26 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}$

4. $\frac{7}{5}$

5. -20 e 27

6. $\frac{1}{5}\sqrt{13}, \ \frac{1}{18}$

7. $-\frac{9}{11}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 2-i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

9. $k = -1$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢