UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Algebra Lineare — Scritto del 16/9/10 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Provare che $f : \mathbb{R}_{\leq 2}[t] \to \mathbb{R}^3$ data da $f(p(t)) = \begin{pmatrix} p(1) \\ p'(-1) \\ p''\left(\sqrt{\pi}\right) \end{pmatrix}$ è invertibile.

2. Data la base $\mathcal{B} = (e_1 + 3e_2 + e_3,\ 2e_1 + e_2 - e_3)$ di $V = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0\}$ provare che $v = 4e_1 - 3e_2 - 5e_3$ appartiene a V e trovare $[v]_{\mathcal{B}}$.

3. Posto $A = \begin{pmatrix} 2-i & 1+i \\ 1-2i & 3-i \end{pmatrix}$ calcolare $\det\left(A^{-1}\right)$.

4. Data $f : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^9$ tale che $f(2e_1 - 7e_3) = 3f(e_2 - 4e_6)$, se $W \subset \mathbb{R}^9$ e $W + \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^9$, che dimensione può avere W?

5. L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare di 3 equazioni in 5 incognite è sempre un sottospazio affine di dimensione 2 di $\mathbb{R}^5$?

6. Risolvere su $\mathbb{C}$ l'equazione $2iz^2 + (1-5i)z + 2(2-i) = 0$.

7. Trovare la proiezione su $V = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 0\}$ del vettore $25e_1$ rispetto alla decomposizione $V \oplus W = \mathbb{R}^3$ con $W = \mathrm{Span}(e_1 + 2e_2 - 3e_3)$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

IN SUPREMÆ DIGNITATIS · 1343 ·

Algebra Lineare — Scritto del 16/9/10 — Esercizî

1. In $\mathbb{R}^4$ considerare i sottospazî V e W definiti dalle seguenti equazioni

$$V : \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \qquad W : \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

e porre $\mathcal{B} = (e_1 - e_2 + 2e_3 + 2e_4,\ 5e_2 + e_3 - e_4)$ e $\mathcal{C} = (e_2 + 4e_3 + 2e_4,\ 2e_1 + 2e_2 + e_3 - 2e_4)$.

(A) (2 punti) Provare che $\mathbb{R}^4 = V \oplus W$.

(B) (2 punti) Provare che $\mathcal{B}$ è una base di V e $\mathcal{C}$ è una base di W.

(C) (3 punti) Dette p e q le proiezioni su V e su W associate alla decomposizione $\mathbb{R}^4 = V \oplus W$ calcolare $p(19e_2)$ e $q(19e_2)$.

(D) (2 punti) Posto $A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 1 & 2 \\ -8 & 2 & 2 & 11 \\ -8 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ provare che la formula $f(v) = A \cdot v$ definisce un'applicazione lineare $f : V \to W$.

(E) (3 punti) Determinare $[f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$.

2. Al variare di $k, h \in \mathbb{R}$ considerare in $\mathbb{R}^4$ i sottospazî affini

$$E_k = \begin{pmatrix} 6k+1 \\ 3 \\ 2 \\ k \end{pmatrix} + \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ k-1 \\ k+1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+2k \\ 3 \\ 1 \\ k \end{pmatrix} \right),$$

$$F_h : \begin{cases} -hx_1 + 3x_2 - 6x_3 - (h+3)x_4 = h+1 \\ x_1 + (2-h)x_2 + (h-1)x_3 + 2x_4 = h-1. \end{cases}$$

(A) (2 punti) Calcolare la dimensione di E_k al variare di k.

(B) (2 punti) Calcolare la dimensione di F_h al variare di h.

(C) (3 punti) Per $k = 2$ determinare equazioni cartesiane di E_2.

(D) (3 punti) Per $h = -2$ determinare equazioni parametriche di $F_{(-2)}$.

(E) (2 punti) Per $k = -1$ e $h = 1$ determinare $E_{(-1)} \cap F_1$.

Risposte esatte

5. ♢

1. È lineare e iniettiva tra spazi della stessa dimensione

2. $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

3. $\frac{1}{10}(1+2i)$

4. Tra 4 e 9

5. No, può essere vuoto o vere dimensione maggiore

6. $z_1 = -\frac{1}{2}(1+i),\ z_2 = 3+i$

7. $\begin{pmatrix} 27 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$

8.

9.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢