



Algebra Lineare — Scritto del 13/1/10 — Quesiti

Nome _____ Cognome _____ Matricola _____

1. Il numero $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ è razionale?
2. A un insieme di 6 elementi linearmente indipendenti di $\{p(t) \in \mathbb{R}_{\leq 10}[t] : p(-13) = 0, p''(5) = 0\}$ quanti se ne devono aggiungere per ottenere una base?
3. Se $f : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^7$ è lineare e iniettiva e $W \subset \mathbb{C}^7$ ha dimensione 5, che dimensione può avere $W \cap \text{Im}(f)$?

4. Per quale $z \in \mathbb{C}$ si annulla $\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2i \\ 1+i & 0 & 1+z \\ i & -2 & 0 \end{pmatrix}$?

5. Risolvere $\begin{cases} 3x - 2y + 5z = -4 \\ 2x + 3y + 4z = 1 \\ 14x - 5y + 24z = -15. \end{cases}$

6. Calcolare i determinanti delle orlate della matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ nella matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

AL09 7. Data la decomposizione $\mathbb{R}^4 = W \oplus Z$ con $W = \text{Span}(e_1 - e_2 + e_3, 3e_2 - e_3 + e_4)$ e $Z = \text{Span}(2e_1 - e_3, 3e_2 - e_4)$, calcolare la proiezione su W di e_1 .

AL08 8. Esibire una base che diagonalizza la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$.

GAI 9. Determinare il tipo affine della conica di equazione $x^2 - 2xy + 3y^2 + 7x - 5y - 8 = 0$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ◇



1. Al variare di $k, h \in \mathbb{R}$ considerare in \mathbb{R}^3 i sottospazi affini

$$E_k = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ -1 \end{pmatrix} + \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 13 - 6k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad F_h : \begin{cases} 3x - 2y + (1 + 7h)z = 1 \\ 3(3 - 4h)x + 2y - 8z = 2 - 3h. \end{cases}$$

- (A) (3 punti) Calcolare la dimensione di E_k al variare di k
- (B) (3 punti) Calcolare la dimensione di F_h al variare di h .
- (C) (2 punti) Esibire equazioni cartesiane di E_k al variare di k
- (D) (2 punti) Esibire equazioni parametriche di F_h al variare di h
- (E) (2 punti) Determinare i valori di k per i quali E_k ed F_0 sono paralleli tra loro.

2. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ sia $f_k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 2k & 9 & 3k - 9 \\ -k - 1 & k - 8 & 7 - 2k \\ 3k + 1 & 3k - 1 & 3k + 2 \end{pmatrix}.$$

- (A) (4 punti) Verificare che esiste un unico valore k_0 di k per il quale f_k non è invertibile.
- (B) (4 punti) Scelta una base \mathcal{B} dell'immagine W di f_{k_0} determinare la matrice $[g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ dove $g : W \rightarrow W$ è data da $g(w) = f_{k_0}(w)$.
- AL09 (C) (4 punti) Detto Z il nucleo di f_{k_0} verificare che $\mathbb{R}^3 = W \oplus Z$ e determinare la proiezione su W rispetto a tale decomposizione di un generico vettore di \mathbb{R}^3 .
- AL08 (D) (4 punti) Stabilire se g sia diagonalizzabile
- GAI (E) (4 punti) Determinare l'angolo tra W e il vettore $3e_1 - 2e_2 + 5e_3$.



Risposte esatte

5. ♥

1. No. Se lo fosse lo sarebbe il suo quadrato, dunque lo sarebbe $\sqrt{15}$, che non lo è per lo stesso argomento che mostra che $\sqrt{2}$ non è razionale.

2. 3

3. Tra 2 e 4

4. $z = 3 + 4i$

5. $x = 1 - 23t$, $y = 1 - 2t$, $z = 13t - 1$ con $t \in \mathbb{R}$

6. 3 e 16

7. $\frac{1}{16}(6e_1 - 3e_2 + 5e_3 + e_4)$

8. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$

9. Ellisse

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ◇
