UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

IN SUPREMÆ DIGNITATIS 1343

Algebra Lineare — Scritto del 13/1/10 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Il numero $\sqrt{2}+\sqrt{7}$ è razionale?

2. Da un insieme di 13 generatori di $\{p(t) \in \mathbb{R}_{\leq 9}[t] : \ p(11)=0, \ p''(-7)=0\}$ quanti se ne devono scartare per ottenere una base?

3. Se $f : \mathbb{C}^8 \to \mathbb{C}^3$ è lineare e surgettiva e $W \subset \mathbb{C}^8$ è un sottospazio vettoriale di dimensione 6, che dimensione può avere $W \cap \operatorname{Ker}(f)$?

4. Per quale $z \in \mathbb{C}$ si annulla $\det \begin{pmatrix} 0 & i & 2 \\ 1-i & 0 & 1+z \\ -2i & 1 & 0 \end{pmatrix}$?

5. Risolvere $\begin{cases} 2x-3y+5z=4 \\ 3x+2y-4z=1 \\ 5x-14y+24z=15. \end{cases}$

6. Calcolare i determinanti delle orlate della matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ nella matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

AL09 **7.** Data la decomposizione $\mathbb{R}^4 = W \oplus Z$ con $W = \operatorname{Span}(2e_1-e_2+e_3, e_2-e_3+e_4)$ e $Z = \operatorname{Span}(3e_1-e_3, 2e_2-e_4)$, calcolare la proiezione su W di e_1.

AL08 **8.** Esibire una base che diagonalizza la matrice $\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$.

GAI **9.** Determinare il tipo affine della conica di equazione $x^2-3xy+2y^2+5x-7y+8=0$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Algebra Lineare — Scritto del 13/1/10 — Esercizî

1. Al variare di $k, h \in \mathbb{R}$ considerare in $\mathbb{R}^3$ i sottospazî affini

$$E_k = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ -1 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 13-6k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}\right), \qquad F_h : \begin{cases} 3x - 2y + (1+7h)z = 1 \\ 3(3-4h)x + 2y - 8z = 2 - 3h. \end{cases}$$

(A) (3 punti) Calcolare la dimensione di E_k al variare di k

(B) (3 punti) Calcolare la dimensione di F_h al variare di h.

(C) (2 punti) Esibire equazioni cartesiane di E_k al variare di k

(D) (2 punti) Esibire equazioni parametriche di F_h al variare di h

(E) (2 punti) Determinare i valori di k per i quali E_k ed F_0 sono paralleli tra loro.

2. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ sia $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 2k & 9 & 3k-9 \\ -k-1 & k-8 & 7-2k \\ 3k+1 & 3k-1 & 3k+2 \end{pmatrix}.$$

(A) (4 punti) Verificare che esiste un unico valore k_0 di k per il quale f_k non è invertibile.

(B) (4 punti) Scelta una base $\mathcal{B}$ dell'immagine W di f_{k_0} determinare la matrice $[g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ dove $g : W \to W$ è data da $g(w) = f_{k_0}(w)$.

AL09 (C) (4 punti) Detto Z il nucleo di f_{k_0} verificare che $\mathbb{R}^3 = W \oplus Z$ e determinare la proiezione su W rispetto a tale decomposizione di un generico vettore di $\mathbb{R}^3$.

AL08 (D) (4 punti) Stabilire se g sia diagonalizzabile

GAI (E) (4 punti) Determinare l'angolo tra W e il vettore $3e_1 - 2e_2 + 5e_3$.

Algebra Lineare — Scritto del 13/1/10 — Quesiti

Risposte esatte

5. $\diamondsuit$

1. No. Se lo fosse lo sarebbe il suo quadrato, dunque lo sarebbe $\sqrt{14}$, che non lo è per lo stesso argomento che mostra che $\sqrt{2}$ non è razionale.

2. 5

3. Tra 3 e 5

4. $z = i - 2$

5. $x = 1 + 2t,\ y = 1 + 23t,\ z = 1 + 13t$ con $t \in \mathbb{R}$

6. -21 e -4

7. $\frac{1}{12}(6e_1 - 2e_2 + 2e_3 + e_4)$

8. $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

9. Iperbole

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$