



Algebra Lineare — Scritto del 10/6/10 — Quesiti

Nome _____ Cognome _____ Matricola _____

1. Calcolare il coefficiente di posto $(2, 2)$ della matrice $\begin{pmatrix} i & -2i & 1+i \\ 0 & 1 & 2-i \\ i-1 & 2 & 3+6i \end{pmatrix}^{-1}$.
 2. Date $\mathcal{B} = (3e_1 - 2e_2, e_1 + e_2)$ e $\mathcal{C} = (2e_1 + e_2, e_1 - 3e_2)$ trovare $[v]_{\mathcal{C}}$ sapendo che $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
 3. Se $X = \{x \in \mathbb{C}^6 : ix_2 + 3x_5 = 0\}$, $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow X$ è lineare, $f(2e_1 + ie_2) = f(e_2 + 2ie_3 - e_5)$ e $Y \oplus \text{Im}(f) = X$, che dimensione può avere Y ?
 4. Data $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ verificare che $X = \{A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : \det(A + B) = \det(A) + \det(B)\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ e calcolarne la dimensione.
 5. Risolvere $\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 3 \\ 3x + 5y - 4z = -1 \\ 7x - y + 6z = 5. \end{cases}$
 6. Sapendo che $z = -\frac{i}{2}$ è soluzione di $2z^3 + (2 + 5i)z^2 + 3(3i - 2)z - 2(2 + i) = 0$, trovare le altre.
- AL09 7. Determinare la proiezione ortogonale in \mathbb{R}^3 di $e_2 - 3e_3$ su $\text{Span}(2e_1 + 2e_2 + 1e_3, 3e_1 + e_2 - e_3)$.
- AL08 8. Trovare una base di $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ che diagonalizza $f : X \rightarrow X$ lineare tale che $f(e_1 - e_2) = -7e_1 + e_2 + 6e_3$ e $f(e_1 - e_3) = -13e_1 + 9e_2 + 4e_3$.
- GAI 9. Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ la conica di equazione $2kx^2 + 2xy + 4y^2 + 12ky + 3 = 0$ è un'ellisse. (Suggerimento: notare che la conica è degenere per $k = 1/2$.)

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ◇



1. Considerare il sottospazio $X = \{x \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 0\}$ e al variare di $k \in \mathbb{R}$ i vettori $v(k) = (-k)e_1 + (3+k)e_2 + (1-k)e_3 + (k+1)e_4$, $w(k) = (3+2k)e_1 + (1+3k)e_2 + (1+2k)e_3 + (k+1)e_4$.

- (A) (1 punto) Calcolare la dimensione di X e provare che $v(k)$ e $w(k)$ appartengono a X per ogni $k \in \mathbb{R}$.
- (B) (1 punto) Dimostrare che $v(k)$ e $w(k)$ sono linearmente indipendenti per ogni $k \in \mathbb{R}$.
- (C) (3 punti) Stabilire se $v(k_1)$ e $w(k_2)$ sono linearmente indipendenti per ogni $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.
- (D) (2 punti) Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ è possibile completare $(v(2), w(0))$ a una base di X con il vettore $v(k)$.
- (E) (2 punti) Verificare che la formula $f(x) = (x_2 - x_1)e_1 + (3x_3 - x_4)e_2 - 2x_4e_3 + (x_2 + x_3)e_4$ definisce un'applicazione lineare $f : X \rightarrow X$.
- (F) (3 punti) Posto $\mathcal{B} = ((v(0), v(1), w(-1)))$ verificare che \mathcal{B} è una base di X e determinare $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

2. In \mathbb{R}^3 considerare i sottospazi affini $E = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ e, al variare di $k \in \mathbb{R}$, quello F_k di equazione $(k+3)x + (1-k)y + (1+3k)z = 1$.

- (A) (3 punti) Determinare un'equazione cartesiana di E .
- (B) (3 punti) Calcolare la dimensione di F_k al variare di k e determinarne equazioni parametriche.
- (C) (3 punti) Discutere la posizione reciproca di E ed F_k al variare di k .
- AL09 (D) (3 punti) Provare che la giacitura di E e $\text{Span}(4e_1 - 3e_3)$ sono in somma diretta e determinare la corrispondente proiezione di e_1 sulla giacitura di E .
- AL08 (E) (3 punti) Provare che esiste una e una sola applicazione lineare f dalla giacitura di E in sé stessa tale che $f \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$ e $f \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \\ -3 \end{pmatrix}$ e calcolare gli autovalori di f .
- GAI (F) (3 punti) Calcolare l'angolo formato dal vettore $-2e_1 + e_2 + 3e_3$ con il prodotto vettoriale dei due vettori assegnati come generatori della giacitura di E .



Risposte esatte

5. ♥

1. $3 + 4i$

2. $\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$

3. Tra 3 e 5

4. Ha equazione $a_{22} = a_{12} + a_{21}$, dunque ha dimensione 3

5. $x = 15 - 13t$, $y = 23t - 26$, $z = 19t - 21$

6. $z = 1 - 2i$, $z = -2$

7. $\frac{1}{50} \begin{pmatrix} 51 \\ -35 \\ -82 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

9. $\frac{1}{8} < k < \frac{1}{12}(\sqrt{21} - 3)$ e $k > \frac{1}{2}$

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ♦