UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

IN SUPREMÆ DIGNITATIS 1343

Algebra Lineare — Scritto del 10/6/10 — Quesiti

Nome __________ **Cognome** __________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Calcolare il coefficiente di posto $(1,3)$ della matrice $\begin{pmatrix} i & -2i & 1+i \\ 0 & 1 & 2-i \\ i-1 & 2 & 1+6i \end{pmatrix}^{-1}$.

2. Date $\mathcal{B} = (2e_1 + e_2, e_1 - 3e_2)$ e $\mathcal{C} = (3e_1 - 2e_2, e_1 + e_2)$ trovare $[v]_{\mathcal{C}}$ sapendo che $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Se $V = \{z \in \mathbb{C}^7 : \; z_1 + iz_4 = 0\}$, $f : \mathbb{C}^5 \to V$ è lineare, $f(e_1 - 3ie_3) = f(2ie_3 + e_5)$ e $W \oplus \mathrm{Im}(f) = V$, che dimensione può avere W?

4. Data $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ verificare che $X = \{A \in \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R}) : \; \det(A+B) = \det(A) + \det(B)\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$ e calcolarne la dimensione.

5. Risolvere $\begin{cases} 5x - 3y + 2z = 3 \\ 4x - 5y - 3z = 1 \\ 6x - y + 7z = 5. \end{cases}$

6. Sapendo che $z = \frac{i}{2}$ è soluzione di $2z^3 - (8+5i)z^2 + 4(1+4i)z + 3(2-i) = 0$, trovare le altre.

AL09 **7.** Determinare la proiezione ortogonale in $\mathbb{R}^3$ di $e_2 - 3e_3$ su $\mathrm{Span}(2e_1 + e_2 + 2e_3, 3e_1 - e_2 + e_3)$.

AL08 **8.** Trovare una base di $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : \; x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ che diagonalizza $f : X \to X$ lineare tale che $f(e_1 - e_2) = -7e_1 + e_2 + 6e_3$ e $f(e_1 - e_3) = -13e_1 + 9e_2 + 4e_3$.

GAI **9.** Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ la conica di equazione $2kx^2 + 2xy + 4y^2 + 12ky + 3 = 0$ è un'ellisse. (Suggerimento: notare che la conica è degenere per $k = 1/2$.)

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Algebra Lineare — Scritto del 10/6/10 — Esercizî

1. Considerare il sottospazio $X = \{x \in \mathbb{R}^4 : \ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 0\}$ e al variare di $k \in \mathbb{R}$ i vettori

$$v(k) = (-k)e_1 + (3+k)e_2 + (1-k)e_3 + (k+1)e_4, \qquad w(k) = (3+2k)e_1 + (1+3k)e_2 + (1+2k)e_3 + (k+1)e_4.$$

(A) (1 punto) Calcolare la dimensione di X e provare che $v(k)$ e $w(k)$ appartengono a X per ogni $k \in \mathbb{R}$.

(B) (1 punto) Dimostrare che $v(k)$ e $w(k)$ sono linearmente indipendenti per ogni $k \in \mathbb{R}$.

(C) (3 punti) Stabilire se $v(k_1)$ e $w(k_2)$ sono linearmente indipendenti per ogni $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

(D) (2 punti) Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ è possibile completare $(v(2), w(0))$ a una base di X con il vettore $v(k)$.

(E) (2 punti) Verificare che la formula $f(x) = (x_2 - x_1)e_1 + (3x_3 - x_4)e_2 - 2x_4e_3 + (x_2 + x_3)e_4$ definisce un'applicazione lineare $f : X \to X$.

(F) (3 punti) Posto $\mathcal{B} = ((v(0), v(1), w(-1))$ verificare che $\mathcal{B}$ è una base di X e determinare $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

2. In $\mathbb{R}^3$ considerare i sottospazî affini $E = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ e, al variare di $k \in \mathbb{R}$, quello F_k di equazione $(k+3)x + (1-k)y + (1+3k)z = 1$.

(A) (3 punti) Determinare un'equazione cartesiana di E.

(B) (3 punti) Calcolare la dimensione di F_k al variare di k e determinarne equazioni parametriche.

(C) (3 punti) Discutere la posizione reciproca di E ed F_k al variare di k.

AL09 (D) (3 punti) Provare che la giacitura di E e $\mathrm{Span}(4e_1 - 3e_3)$ sono in somma diretta e determinare la corrispondente proiezione di e_1 sulla giacitura di E.

AL08 (E) (3 punti) Provare che esiste una e una sola applicazione lineare f dalla giacitura di E in sé stessa tale che $f\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$ e $f\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \\ -3 \end{pmatrix}$ e calcolare gli autovalori di f.

GAI (F) (3 punti) Calcolare l'angolo formato dal vettore $-2e_1 + e_2 + 3e_3$ con il prodotto vettoriale dei due vettori assegnati come generatori della giacitura di E.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Algebra Lineare — Scritto del 10/6/10 — Quesiti

Risposte esatte

5. $\diamondsuit$

1. $5 - 3i$

2. $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$

3. Tra 2 e 6

4. Ha equazione $a_{21} = a_{11} + a_{22}$, dunque ha dimensione 3

5. $x = 19t - 21,\ y = 23t - 26,\ z = 15 - 13t$

6. $z = 3,\ z = 1 + 2i$

7. $-\frac{1}{50}\begin{pmatrix} 57 \\ 26 \\ 55 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

9. $\frac{1}{8} < k < \frac{1}{12}\left(\sqrt{21} - 3\right)$ e $k > \frac{1}{2}$

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$