



1. Se sono dati 4 vettori linearmente indipendenti in $Z = \{z \in \mathbb{C}^9 : 5z_1 + iz_4 = 2iz_2 - 3z_9 = 7iz_5 + 4z_3\}$, quanti bisogna aggiungerne per ottenere una base di Z ?

2. Se $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^7$ è lineare, non nulla e non iniettiva, e $\mathbb{R}^7 = X \oplus \text{Im}(f)$, che dimensione ha X ?

3. Se $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ è lineare, $\mathcal{B} = (e_1 + 2e_2, 2e_1 + 3e_2)$ e $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, quanto fa $f(e_1 + 3e_2)$?

4. Data $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, calcolare $(A^{-1})_{23}$.

5. In una matrice 7×6 , quante sono le orlate di una specificata sottomatrice 3×3 ?

6. Sapendo che $4z^3 + 8(i-1)z^2 + (5-6i)z - 5$ ha la radice $z = 1 - \frac{i}{2}$, trovare le altre radici.

7. Posto $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0\}$ e $Y = \text{Span}(e_1 + e_2 + e_3)$ provare che $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$ e calcolare l'associata proiezione su X di $e_1 + 2e_3$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ◇



1. Data $M \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ porre $C(M) = \{A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : A \cdot M = M \cdot A\}$. Definire inoltre $f : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ come l'operazione di scambio dei due coefficienti sulla prima colonna.
- (A) (3 punti) Verificare che $C(M)$ è un sottospazio di $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ e ha sempre dimensione almeno 2.
- (B) (3 punti) Provare che f è lineare e invertibile.
- (C) (3 punti) Posto $X_1 = C(M_1)$ e $X_2 = f(C(M_2))$ con $M_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, provare che $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) = X_1 \oplus X_2$ e determinare l'associata proiezione su X_1 di $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- (D) (3 punti) Verificare che $C(M)$ non ha mai dimensione 3.

2. In \mathbb{R}^4 considerare i vettori $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e porre $\mathcal{B} = (v, v_1, v_2, v_3)$ e $E = v + \text{Span}(v_1, v_2, v_3)$.

- (A) (4 punti) Determinare equazioni cartesiane per E .
- (B) (4 punti) Verificare che \mathcal{B} è una base di \mathbb{R}^4 ed esibire $x \in \mathbb{R}^4$ avente componenti tutte intere positive e tale che $[x]_{\mathcal{B}}$ ha anch'esso componenti tutte intere positive.

- (C) (4 punti) Determinare la posizione rispetto a E di $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \text{Span} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.



Risposte esatte

5. ♥

1. 3

2. Tra 4 e 6

3. $5e_1 + 8e_2$

4. $-\frac{7}{2}$

5. 12

6. $1 - 2i, \frac{i}{2}$

7. $-\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$

8.

9.

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ◇
