UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Algebra Lineare — Scritto del 1/7/10 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Se sono dati 11 generatori di $Z = \{z \in \mathbb{C}^9 : \ 5z_1 + iz_4 = 2iz_2 - 3z_9 = 7iz_5 + 4z_3\}$, quanti bisogna scartarne per ottenere una base di Z?

2. Se $f : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^4$ è lineare, non nulla e non surgettiva, e $\mathbb{R}^6 = X \oplus \mathrm{Ker}(f)$, che dimensione ha X?

3. Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è lineare, $\mathcal{B} = (2e_1 + e_2, 3e_1 + 2e_2)$ e $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, quanto fa $f(4e_1 + 3e_2)$?

4. Data $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, calcolare $(A^{-1})_{23}$.

5. In una matrice 6×7, quante sono le orlate di una specificata sottomatrice 4×4?

6. Sapendo che $6z^3 - (12 + 17i)z^2 + (19i - 5)z + 5$ ha la radice $z = 1 + \frac{i}{2}$, trovare le altre radici.

7. Posto $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0\}$ e $Y = \mathrm{Span}(3e_1 - e_3)$ provare che $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$ e calcolare l'associata proiezione su X di $e_1 + e_2 + e_3$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Algebra Lineare — Scritto del 1/7/10 — Esercizî

1. Data $M \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ porre $C(M) = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \ A \cdot M = M \cdot A\}$. Definire inoltre $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ come l'operazione di scambio dei due coefficienti sulla prima colonna.

(A) (3 punti) Verificare che $C(M)$ è un sottospazio di $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e ha sempre dimensione almeno 2.

(B) (3 punti) Provare che f è lineare e invertibile.

(C) (3 punti) Posto $X_1 = C(M_1)$ e $X_2 = f(C(M_2))$ con $M_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, provare che $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = X_1 \oplus X_2$ e determinare l'associata proiezione su X_1 di $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(D) (3 punti) Verificare che $C(M)$ non ha mai dimensione 3.

2. In $\mathbb{R}^4$ considerare i vettori $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e porre $\mathcal{B} = (v, v_1, v_2, v_3)$ e $E = v + \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3)$

(A) (4 punti) Determinare equazioni cartesiane per E.

(B) (4 punti) Verificare che $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}^4$ ed esibire $x \in \mathbb{R}^4$ avente componenti tutte intere positive e tale che $[x]_{\mathcal{B}}$ ha anch'esso componenti tutte intere positive.

(C) (4 punti) Determinare la posizione rispetto a E di $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Algebra Lineare — Scritto del 1/7/10 — Quesiti

Risposte esatte

5. $\diamondsuit$

1. 4

2. Tra 1 e 3

3. $-7e_1 - 5e_2$

4. $\frac{11}{3}$

5. 6

6. $1 + 2i,\ \frac{i}{3}$

7. $\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

8.

9.

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$