UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Geometria — Scritto del 24/7/09 — Quesiti

Nome ______________ **Cognome** ______________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Calcolare l'angolo formato dai vettori $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} -11 & 2+k \\ 2k-1 & 1+k^4 \end{pmatrix}$ ammette una base ortonormale di autovettori?

3. Esiste $X \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ antihermitiana e invertibile?

4. Per quali $k \in \mathbb{R}$ coincidono i punti di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ di coordinate omogenee $[2k-1 : 1+k : 1-2k]$ e $[k-1 : 3-k : 2k-5]$?

5. Determinare il tipo affine della quadrica di equazione $x^2+5y^2-3z^2+6xy+2xz-2yz+2z=0$.

Geom **6.** Quali punti all'infinito in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ha il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ di equazione $(x+y^2)\left(y+\sqrt[3]{5}\right)(2x-3y+11)=0$?

Geom **7.** Esibire una 1-forma chiusa ω definita su $\mathbb{R}^2$ escluso il punto $(0,1)$ tale che l'integrale di ω sul bordo del disco di centro 0 e raggio 2 valga -1.

GAII **8.** Determinare $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ dove $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-3x \\ y-2x \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ e $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$.

GAII **9.** Sapendo che $A = (v_1 \quad v_2 \quad v_3)$ e $\det(A) = -\frac{1}{5}$ calcolare $\det(2v_2 - v_3 \quad 3v_1 + 2v_3 \quad 2v_2 - v_1)$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria — Scritto del 24/7/09 — Esercizî

1. Considerare la matrice simmetrica $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

(A) (4 punti) Trovare gli autovalori di A provando che uno è nullo.

(B) (4 punti) Esibire una base ortonormale che diagonalizza A.

(C) (4 punti) Esibire la proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^3$ sull'immagine di A.

Geom **2.** Considerare la funzione $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = (\sin(\pi t), 2t^2 - 1)$.

Geom (A) (3 punti) Provare che α parametrizza una curva liscia, stabilire il segno della curvatura di α per $t = \frac{3}{2}$ e il valore della curvatura per $t = \frac{1}{2}$.

Geom (B) (3 punti) Chiamata β la restrizione di α a $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ calcolare $\int_\beta e^{xy}(y\,dx + x\,dy)$.

Geom (C) (3 punti) Descrivere tutti gli intervalli I tali che la restrizione $\alpha|_I$ di α ad I sia una curva chiusa e verificare che ne esiste uno solo I_0 tale che $\gamma = \alpha|_{I_0}$ sia anche semplice.

Geom (D) (3 punti) Dire se il supporto di γ ammetta ovunque retta tangente e calcolare $\int_\gamma \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$.

GAII **3.** Al variare di k in $\mathbb{R}$ considerare la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k+5 & 3 & -7k-16 \\ -3 & k-2 & 4k+9 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

GAII (A) (3 punti) Provare che per ogni k la A_k ha l'autovalore 1 e determinare un relativo autovettore.

GAII (B) (3 punti) Per $k = -1$ verificare che A_{-1} è diagonalizzabile ed esibire una base che la diagonalizza.

GAII (C) (3 punti) Per k generico determinare gli altri autovalori di A_k e discuterne la diagonalizzabilità.

GAII (D) (3 punti) Per $k = 1$ determinare il tipo affine della conica associata alla matrice ${}^{t}A_1 + A_1$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria — Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell'Ambiente e del Territorio

Geometria — Scritto del 24/7/09 — Quesiti

Risposte esatte

5. ♡

1. $\arccos\left(\frac{4}{\sqrt{21}}\right)$

2. $k = 3$

3. Sì, ad esempio $\begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

4. $k = 2$

5. Paraboloide iperbolico

6. $[1 : 0 : 0]$ e $[3 : 2 : 0]$

7. $\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{(y-1)\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{x^2+(y-1)^2}$

8. $\begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$

9. 2

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢